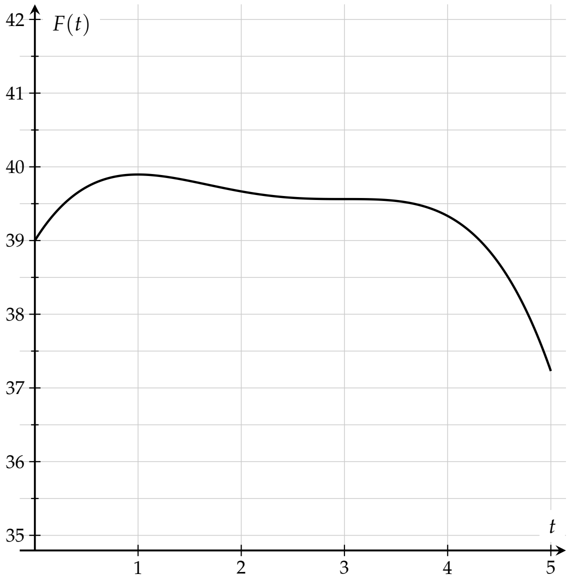
Aufgabe 14

$$F(t) = -\frac{1}{16}t^4 + \frac{7}{12}t^3 - \frac{15}{8}t^2 + \frac{9}{4}t + 39$$

$$0 \leqslant t \leqslant 5$$

a) An dem Graphen der Funktion F lässt sich erkennen, dass der Funktionswert (also die Körpertemperatur) für $0 \leqslant t \leqslant 5$ zwischen 37 $°C$ und 40 $°C$ liegt, was im Falle eines (sehr) kranken Menschen durchaus möglich ist.



Die Körpertemperatur unter 20 $°C$ würde übrigens den Kältetod und die über 44 $°C$ den Tod durch Denaturierung von Proteinen bedeuten.

b) Notwendige Bedingung: $F'(t) = 0$

$$F'(t) = -\frac{1}{4}t^3 + \frac{7}{4}t^2 - \frac{15}{4}t + \frac{9}{4}$$

$$-\frac{1}{4}t^3 + \frac{7}{4}t^2 - \frac{15}{4}t + \frac{9}{4} = 0$$

Mit `Run-Matrix` $\rightarrow$ $\boxed{\text{OPTN}}$ $\rightarrow$ `CALC` $\boxed{\text{F4}}$ $\rightarrow$ `SolveN` $\boxed{\text{F5}}$

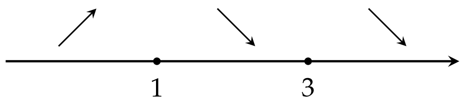
$$t_1 = 1$$
$$t_2 = 3$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $F'(t)$

$$F'(0) = -\frac{1}{4} \cdot 0^3 + \frac{7}{4} \cdot 0^2 - \frac{15}{4} \cdot 0 + \frac{9}{4} = 2{,}25 > 0$$

$$F'(2) = -\frac{1}{4} \cdot 2^3 + \frac{7}{4} \cdot 2^2 - \frac{15}{4} \cdot 2 + \frac{9}{4} = -0{,}25 < 0$$

$$F'(4) = -\frac{1}{4} \cdot 4^3 + \frac{7}{4} \cdot 4^2 - \frac{15}{4} \cdot 4 + \frac{9}{4} = -0{,}75 < 0$$



Das heißt an der Stelle $t = 1$ befindet sich ein lokaler Hochpunkt und an der Stelle $t = 3$ ein Sattelpunkt.

$$F(1) = -0{,}4 \cdot 6{,}54^3 + 2{,}7 \cdot 6{,}54^2 + 16 \cdot 6{,}54 + 285 \approx 39{,}9$$

Die tiefste bzw. die höchste Körpertemperatur könnte aber an den Intervallgrenzen liegen:

$$F(0) = -\frac{1}{16} \cdot 0^4 + \frac{7}{12} \cdot 0^3 - \frac{15}{8} \cdot 0^2 + \frac{9}{4} \cdot 0 + 39 = 39$$

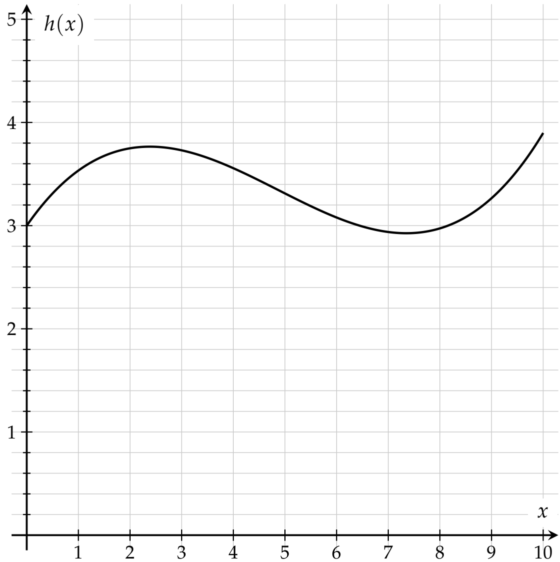
$$F(5) = -\frac{1}{16} \cdot 5^4 + \frac{7}{12} \cdot 5^3 - \frac{15}{8} \cdot 5^2 + \frac{9}{4} \cdot 5 + 39 \approx 37{,}23$$

Die höchste Körpertemperatur des Patienten betrug also $\approx 39{,}9\ ^\circ C$ und die tiefste $37{,}23\ ^\circ C$.

Aufgabe 15

$$h(x) = \frac{1}{73}x^3 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{18}{25}x + 3$$

$$0 \leqslant x \leqslant 10$$



Notwendige Bedingung: $h'(x) = 0$

$$h'(x) = \frac{3}{73}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{18}{25}$$

$$\frac{3}{73}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{18}{25} = 0$$

Mit `Run-Matrix` $\rightarrow$ $\boxed{\text{OPTN}}$ $\rightarrow$ `CALC` $\boxed{\text{F4}}$ $\rightarrow$ `SolveN` $\boxed{\text{F5}}$

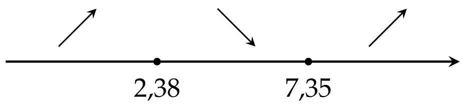
$$x_1 \approx 2{,}38$$
$$x_2 \approx 7{,}35$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $h'(x)$

$$h'(1) = \frac{3}{73} \cdot 1^2 - \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{18}{25} \approx 0{,}36 > 0$$

$$h'(3) = \frac{3}{73} \cdot 3^2 - \frac{2}{5} \cdot 3 + \frac{18}{25} \approx -0{,}11 < 0$$

$$h'(8) = \frac{3}{73} \cdot 8^2 - \frac{2}{5} \cdot 8 + \frac{18}{25} \approx 0{,}15 > 0$$



Das heißt an der Stelle $x = 2{,}38$ befindet sich ein lokaler Hochpunkt und an der Stelle $x = 7{,}35$ ein lokaler Tiefpunkt.

$$h(2{,}38) = \frac{1}{73} \cdot 2{,}38^3 - \frac{1}{5} \cdot 2{,}38^2 + \frac{18}{25} \cdot 2{,}38 + 3 \approx 3{,}77$$

$$h(7{,}35) = \frac{1}{73} \cdot 7{,}35^3 - \frac{1}{5} \cdot 7{,}35^2 + \frac{18}{25} \cdot 7{,}35 + 3 \approx 2{,}93$$

Wir untersuchen die Funktionswerte an den Intervallgrenzen:

$$h(0) = \frac{1}{73} \cdot 0^3 - \frac{1}{5} \cdot 0^2 + \frac{18}{25} \cdot 0 + 3 = 3$$

$$h(10) = \frac{1}{73} \cdot 10^3 - \frac{1}{5} \cdot 10^2 + \frac{18}{25} \cdot 10 + 3 = 3{,}9$$

Das heißt, der Tiefpunkt an der Stelle $x = 7{,}35$ ist global, der größte Funktionswert für $0 \leqslant x \leqslant 10$ liegt aber nicht bei $x = 2{,}38$, sondern bei $x = 10$. Der Unterschied zwischen dem größten und dem kleinsten Funktionswert beträgt

$$h(10) - h(7{,}35) = 3{,}9 - 2{,}93 = 0{,}97$$

also 0,97 *cm* und somit ist die Bedingung erfüllt.