Aufgabe 2

a) Fairer Würfel mit 6 Seiten:

A	1	2	3	4	5	6
$P(A)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\mu = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$$

Ein möglicher gezinkter Würfel mit 6 Seiten:

A	1	2	3	4	5	6
$P(A)$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\mu = 1 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 4$$

Fairer Würfel mit 12 Seiten:

A	1	2	3	4	5	6
$P(A)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
A	7	8	9	10	11	12
$P(A)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

$$\begin{aligned}\mu &= 1 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{12} + 5 \cdot \frac{1}{12} + 6 \cdot \frac{1}{12} \\ &\quad + 7 \cdot \frac{1}{12} + 8 \cdot \frac{1}{12} + 9 \cdot \frac{1}{12} + 10 \cdot \frac{1}{12} + 11 \cdot \frac{1}{12} + 12 \cdot \frac{1}{12} \\ &= 6{,}5\end{aligned}$$

Ein möglicher gezinkter Würfel mit 12 Seiten:

A	1	2	3	4	5	6
$P(A)$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

A	7	8	9	10	11	12
$P(A)$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned}\mu &= 1\cdot 0 + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot 0 + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot 0 + 6\cdot\frac{1}{6}\\ &+ 7\cdot 0 + 8\cdot\frac{1}{6} + 9\cdot 0 + 10\cdot\frac{1}{6} + 11\cdot 0 + 12\cdot\frac{1}{6}\\ &= 3{,}5\end{aligned}$$

b) Würfel mit 6 Seiten (Fig. 3):

$$\overline{x} = \frac{1\cdot 8 + 2\cdot 9 + 3\cdot 7 + 4\cdot 11 + 5\cdot 5 + 6\cdot 10}{50} = 3\frac{13}{25} = 3{,}52$$

Die mittlere Punktzahl ist ungefähr gleich dem Erwartungswert der Wahrscheinlichkeitsverteilung von einem fairen Würfel mit 6 Seiten.

Würfel mit 12 Seiten (Fig. 4):

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{50}\cdot(1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 9 + 4\cdot 3 + 5\cdot 4 + 6\cdot 0\\ &+ 7\cdot 3 + 8\cdot 5 + 9\cdot 6 + 10\cdot 1 + 11\cdot 6 + 12\cdot 6)\\ &= 6\frac{33}{50} \approx 6{,}66\end{aligned}$$

Die mittlere Punktzahl ist ungefähr gleich dem Erwartungswert der Wahrscheinlichkeitsverteilung von einem fairen Würfel mit 12 Seiten.

Aufgabe 3

a) Es handelt sich um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, weil die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse größer oder gleich Null und kleiner oder gleich Eins sind und die Summe aller Wahrscheinlichkeiten Eins ergibt:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = 1$$

Der Erwartungswert

$$\mu = -10 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$$

ist positiv. Auf (sehr!) lange Sicht lohnt sich das Spiel schon, nur bedeutet dies nicht, dass man in den ersten 10, 100 oder auch 1000 Runden unbedingt einen Gewinn machen wird!

b) Falls die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung wie im Teil (a) erwünscht ist und der zwölfseitige Würfel fair ist, könnten die Spielregeln beispielsweise wie folgt lauten:

— Würfelt man 1, 2 oder 3, so verliert man 10 Nuggets.

— Würfelt man 4 oder 5, so verliert man nichts, gewinnt man aber auch nichts.

— Würfelt man 6, 7, 8, 9, 10 oder 11, so gewinnt man 5 Nuggets.

— Würfelt man 12, so gewinnt man 10 Nuggets.