Aufgabe 1

Alle Exponenten von x sind ungerade, der Graph von f ist also punktsymmetrisch zum Ursprung:

a) $f(x) = x^1$

c) $f(x) = x^3$

Alle Exponenten von x sind gerade, der Graph von f ist also achsensymmetrisch zur y-Achse:

b) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = -x^4 - 5x^2 + 3x^0$

g) $f(x) = -2x^6 + 3x^2$

h) $f(x) = 2x^0 - 3x^4$

Exponenten von x sind sowohl gerade, als auch ungerade, der Graph von f ist also weder punkt- noch achsensymmetrisch:

e) $f(x) = x^5 - 3x^3 - 1x^0$

f) $f(x) = x^5 + 3x^3 + x^2 - 4x^1$

i) $f(x) = 2x^0 - 3x^3$

Aufgabe 2

Alle Exponenten von x sind ungerade, der Graph von f ist also punktsymmetrisch zum Ursprung:

f) $f(x) = x^3(x+1)(x-1) = x^3(x^2-1) = x^5 - x^3$

Alle Exponenten von x sind gerade, der Graph von f ist also achsensymmetrisch zur y-Achse:

a) $f(x) = x^4$

c) $f(x) = 7x^0 - x^4 + 2x^6$

e) $f(x) = \frac{1}{6}x^6 - x^2 - (\sqrt{2}+1)x^0$

Exponenten von x sind sowohl gerade, als auch ungerade, der Graph von f ist also weder punkt- noch achsensymmetrisch:

b) $f(x) = 2x^1 + 3x^0$

d) $f(x) = 4x^3 + 1x^0$

Aufgabe 3

Die Graphen von *ungeraden* Funktionen sind punktsymmetrisch zum Ursprung und die Graphen von *geraden*Funktionen sind achsensymmetrisch zur y-Achse.

a) Mit vereinfachten Regeln:

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x^2-5) \\ &= x^3 - 5x \\ &= x^3 - 5x^1 \end{aligned}$$

Alle Exponenten von x sind ungerade, der Graph von f ist also punktsymmetrisch zum Ursprung.

<u>Alternative</u>:

$$\begin{aligned} -\big(f(x)\big) &= f(-x) \\ -\big(x(x^2-5)\big) &= (-x)\big((-x)^2-5\big) \\ -x(x^2-5) &= -x(x^2-5) \end{aligned}$$

Der Graph von f ist also punktsymmetrisch zum Ursprung.

b) Mit vereinfachten Regeln:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)^2+1 \\ &= x^2-4x+4+1 \\ &= x^2-4x+5 \\ &= x^2-4x^1+5x^0 \end{aligned}$$

Exponenten von x sind sowohl gerade, als auch ungerade, der Graph von f ist also weder punkt- noch achsensymmetrisch.

<u>Alternative</u>:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ (x-2)^2+1 &= \big((-x)-2\big)^2+1 \\ x^2-4x+4+1 &= (-x-2)^2+1 \\ x^2-4x+5 &= x^2+4x+4+1 \\ x^2-4x+5 &\neq x^2+4x+5 \end{aligned}$$

Keine Achsensymmetrie zur y-Achse.

$$\begin{aligned}
-\big(f(x)\big) &= f(-x) \\
-\big((x-2)^2+1\big) &= \big((-x)-2\big)^2+1 \\
-(x-2)^2-1 &= (-x-2)^2+1 \\
-(x^2-4x+4)-1 &= x^2+4x+4+1 \\
-x^2+4x-4-1 &= x^2+4x+5 \\
-x^2+4x-5 &\neq x^2+4x+5
\end{aligned}$$

Keine Punktsymmetrie zum Ursprung. Der Graph von f ist also weder punkt- noch achsensymmetrisch.

c) Mit vereinfachten Regeln:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x(x-1)(x+1) \\
&= x(x^2-1) \\
&= x^3-x \\
&= x^3-x^1
\end{aligned}$$

Alle Exponenten von x sind ungerade, der Graph von f ist also punktsymmetrisch zum Ursprung.

Alternative:

$$\begin{aligned}
-\big(f(x)\big) &= f(-x) \\
-\big(x(x-1)(x+1)\big) &= -x\big((-x)-1\big)\big((-x)+1\big) \\
-x(x-1)(x+1) &= -x(-x-1)(-x+1) \\
(-x^2+x)(x+1) &= (x^2+x)(-x+1) \\
-x^3-x^2+x^2+x &= -x^3+x^2-x^2+x \\
-x^3+x &= -x^3+x
\end{aligned}$$

Der Graph von f ist also punktsymmetrisch zum Ursprung.

d) Mit vereinfachten Regeln:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x-2) \\ &= x^2 - 2x - x + 2 \\ &= x^2 - 3x + 2 \\ &= x^2 - 3x^1 + 2x^0 \end{aligned}$$

Exponenten von x sind sowohl gerade, als auch ungerade, der Graph von f ist also weder punkt- noch achsensymmetrisch.

<u>Alternative</u>:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ (x-1)(x-2) &= \big((-x)-1\big)\big((-x)-2\big) \\ x^2 - 2x - x + 2 &= (-x-1)(-x-2) \\ x^2 - 3x + 2 &= x^2 + 2x + x + 2 \\ x^2 - 3x + 2 &\neq x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

Keine Achsensymmetrie zur y-Achse.

$$\begin{aligned} -\big(f(x)\big) &= f(-x) \\ -\big((x-1)(x-2)\big) &= \big((-x)-1\big)\big((-x)-2\big) \\ -(x-1)(x-2) &= (-x-1)(-x-2) \\ (-x+1)(x-2) &= x^2 + 2x + x + 2 \\ -x^2 + 2x + x - 2 &= x^2 + 3x + 2 \\ -x^2 + 3x - 2 &\neq x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

Keine Punktsymmetrie zum Ursprung. Der Graph von f ist also weder punkt- noch achsensymmetrisch.

e) Mit vereinfachten Regeln:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x^3(6-x^2) \\ &= 2x^3 - \frac{1}{3}x^5 \end{aligned}$$

Alle Exponenten von x sind ungerade, der Graph von f ist also punktsymmetrisch zum Ursprung.

Alternative:

$$\begin{aligned} -\big(f(x)\big) &= f(-x) \\ -\left(\frac{1}{3}x^3(6-x^2)\right) &= \frac{1}{3}(-x)^3\big(6-(-x)^2\big) \\ -\frac{1}{3}x^3(6-x^2) &= -\frac{1}{3}x^3\big(6-x^2\big) \end{aligned}$$

Der Graph von f ist also punktsymmetrisch zum Ursprung.

f) Mit vereinfachten Regeln:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2-x)^2(2+x)^2 \\ &= \big((2-x)(2+x)\big)^2 \\ &= (4-x^2)^2 \\ &= 16 - 8x^2 + x^4 \\ &= 16x^0 - 8x^2 + x^4 \end{aligned}$$

Alle Exponenten von x sind gerade, der Graph von f ist also achsensymmetrisch zur y-Achse.

Alternative:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ (2-x)^2(2+x)^2 &= \big(2-(-x)\big)^2\big(2+(-x)\big)^2 \\ (2-x)^2(2+x)^2 &= (2+x)^2(2-x)^2 \end{aligned}$$

Der Graph von f ist also achsensymmetrisch zur y-Achse.

g) Mit vereinfachten Regeln:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^3 + 3x^2 + 1 \\ &= (x-1)^2(x-1) + 3x^2 + 1 \\ &= (x^2-2x+1)(x-1) + 3x^2 + 1 \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 + 1 \\ &= x^3 + 3x \\ &= x^3 + 3x^1 \end{aligned}$$

Alle Exponenten von x sind ungerade, der Graph von f ist also punktsymmetrisch zum Ursprung.

Alternative:

$$\begin{aligned} -\big(f(x)\big) &= f(-x) \\ -\big((x-1)^3 + 3x^2 + 1\big) &= \big((-x)-1\big)^3 + 3(-x)^2 + 1 \\ -(x-1)^3 - 3x^2 - 1 &= (-x-1)^3 + 3x^2 + 1 \\ -(x-1)^2(x-1) - 3x^2 - 1 &= (-x-1)^2(-x-1) + 3x^2 + 1 \\ -(x^2-2x+1)(x-1) - 3x^2 - 1 &= (x^2+2x+1)(-x-1) + 3x^2 + 1 \\ -(x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1) - 3x^2 - 1 &= -x^3 - x^2 - 2x^2 - 2x - x - 1 + 3x^2 + 1 \\ -(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 3x^2 - 1 &= -x^3 - 3x \\ -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 3x^2 - 1 &= -x^3 - 3x \\ -x^3 - 3x &= -x^3 - 3x \end{aligned}$$

Der Graph von f ist also punktsymmetrisch zum Ursprung.

h) Mit vereinfachten Regeln:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-3x^2)^2 \\ &= 1-6x^2+9x^4 \\ &= 1x^0-6x^2+9x^4 \end{aligned}$$

Alle Exponenten von x sind gerade, der Graph von f ist also achsensymmetrisch zur y-Achse.

<u>Alternative</u>:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ (1-3x^2)^2 &= \left(1-3(-x)^2\right)^2 \\ (1-3x^2)^2 &= (1-3x^2)^2 \end{aligned}$$

Der Graph von f ist also achsensymmetrisch zur y-Achse.

i) Mit vereinfachten Regeln:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-x^2)^2 \\ &= x^2-2x^3+x^4 \end{aligned}$$

Exponenten von x sind sowohl gerade, als auch ungerade, der Graph von f ist also weder punkt- noch achsensymmetrisch.

<u>Alternative</u>:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ (x-x^2)^2 &= \left((-x)-(-x)^2\right)^2 \\ x^2-2x^3+x^4 &= (-x-x^2)^2 \\ x^2-2x^3+x^4 &\neq x^2+2x^3+x^4 \end{aligned}$$

Keine Achsensymmetrie zur y-Achse.

$$\begin{aligned}
-\big(f(x)\big) &= f(-x) \\
-\big((x-x^2)^2\big) &= \big((-x)-(-x)^2\big)^2 \\
-(x-x^2)^2 &= (-x-x^2)^2 \\
-(x^2-2x^3+x^4) &= x^2+2x^3+x^4 \\
-x^2+2x^3-x^4 &\neq x^2+2x^3+x^4
\end{aligned}$$

Keine Punktsymmetrie zum Ursprung. Der Graph von f ist also weder punkt- noch achsensymmetrisch.