Aufgabe 5

a) Wir lesen ab:

— Zum Zeitpunkt $t = 3$ waren etwa 400 Bakterien vorhanden.

— Zum Zeitpunkt $t = 2$ waren etwa 300 Bakterien vorhanden.

— Zum Zeitpunkt $t \approx 4{,}5$ waren etwa 700 Bakterien vorhanden.

b) Der Anfangswert c (bei $t = 0$) kann nicht genau abgelesen werden ist aber eindeutig näher zu 150 als zu 100.

Der Wachstumsfaktor 1,4 würde 40% Wachstum (pro Stunde) bedeuten in 3 Stunden sollten es also $150 \cdot 1{,}4^3 = 411{,}6$ also etwa 411 Bakterien sein — dieser Wert passt eher zu dem Graphen als $150 \cdot 1{,}2^3 = 259{,}2$ (etwa 259 Bakterien). Mit $c = 150$ und $a = 1{,}4$ folgt der Term:

$$150 \cdot 1{,}4^x$$

c) Sollte der Term aus (b) stimmen, so sind es nach einem Tag (24 Stunden)

$$150 \cdot 1{,}4^{24} = 482.129{,}96$$

also etwa 482.129 Bakterien. Nach einer Woche ($24 \cdot 7 = 168$ Stunden) wären es dann

$$150 \cdot 1{,}4^{168} = 531.619.928.868.800.114.792.192.919{,}99$$

also $5{,}32 \cdot 10^{26}$ (5 mit 26 Nullen) Bakterien.

In der Realität ist ein solches unbegrenztes Wachstum eher eine Seltenheit, weil es meistens durch äußere Faktoren beschränkt oder verlangsamt wird.

Aufgabe 6

$$f(x) = c \cdot a^x \qquad a = 1 + \frac{p}{100}$$

a) Der Anfangswert $c = 350\ mg$ und 18% Abnahme heißt

$$a = 1 - \frac{18}{100} = 0{,}82$$

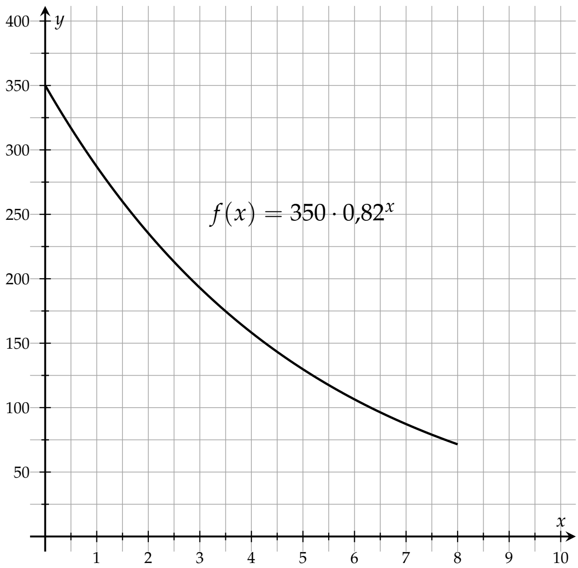
also

$$f(x) = 350 \cdot 0{,}82^x$$

$$\begin{aligned}
f(0) &= 350 \cdot 0{,}82^0 = 350\\
f(1) &= 350 \cdot 0{,}82^1 = 287\\
f(2) &= 350 \cdot 0{,}82^2 = 235{,}34\\
f(3) &= 350 \cdot 0{,}82^3 = 192{,}98\\
f(4) &= 350 \cdot 0{,}82^4 = 158{,}24\\
f(5) &= 350 \cdot 0{,}82^5 = 129{,}76\\
f(6) &= 350 \cdot 0{,}82^6 = 106{,}4\\
f(7) &= 350 \cdot 0{,}82^7 = 87{,}25\\
f(8) &= 350 \cdot 0{,}82^8 = 71{,}54
\end{aligned}$$

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	350	287	235,34	192,98	158,24

x	5	6	7	8
$f(x)$	129,76	106,4	87,25	71,54



Mathematisch gesehen, wird das Vitamin nie ausgeschieden (der Graph schneidet die x-Achse nie!), allerdings wird sich die Restmenge des Präparates im Blut ab einem bestimmten Zeitpunkt nicht mehr messen lassen, weil die Konzentration viel zu gering dafür sein wird.

Nach 52 Stunden beträgt die Restmenge

$$f(52) = 350 \cdot 0{,}82^{52} = 0{,}01\ [mg]$$

was für unsere Zwecke nach genug an Null ist so dass wir behaupten können, dass das Präparat nach 52 Stunden ausgeschieden sein wird.

b) Der Anfangswert $c = 650\ mg$. Nach 15 Minuten sind 5% davon ausgeschieden, es bleiben also

$$650 - \frac{650}{100} \cdot 5 = 617{,}5\ [mg]$$

im Blut. Das heißt:

$$\begin{aligned} 617{,}5 &= 650 \cdot a^{15} && \mid : 650 \\ \frac{617{,}5}{650} &= a^{15} && \mid \sqrt[15]{\ } \\ a &\approx 0{,}99 \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet somit:

$$f(x) = 650 \cdot 0{,}99^x$$

(x wird hier in Minuten angegeben!) und wir erhalten

$$\begin{aligned} f(120) &= 650 \cdot 0{,}99^{120} = 194{,}6\ [mg] \\ f(240) &= 650 \cdot 0{,}99^{240} = 58{,}26\ [mg] \\ f(360) &= 650 \cdot 0{,}99^{360} = 17{,}44\ [mg] \end{aligned}$$

Nach 2 Stunden bleiben 194,6 mg, nach 4 Stunden sind es 58,26 mg und nach 6 Stunden nur noch 17,44 mg.