Aufgabe 8

$$f(x) = c \cdot a^x \qquad c > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

a) Der Anfangswert der Statue (also bei $x = 0$) im Jahr 2015 beträgt 80.000 €:

$$(0 \mid 80.000)$$

Der Verkaufswert $2021 - 2015 = 6$ Jahre später ($x = 6$) beträgt 105.000 €:

$$(6 \mid 105.000)$$

$$\begin{aligned} 80.000 &= c \cdot a^0 \\ 80.000 &= c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 105.000 &= c \cdot a^6 \\ 105.000 &= 80.000a^6 && \mid : 80.000 \\ 1{,}31 &= a^6 && \mid \sqrt[6]{\ } \\ 1{,}05 &= a \end{aligned}$$

$$f(x) = 80.000 \cdot 1{,}05^x$$

Wegen

$$a = 1 + \frac{p}{100}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} 1{,}05 &= 1 + \frac{p}{100} && \mid -1 \\ 0{,}05 &= \frac{p}{100} && \mid \cdot 100 \\ 5 &= p \end{aligned}$$

Die prozentuale jährliche Wertsteigerung der Statue beträgt somit etwa 5%.

b) Der Anfangswert des Hauses (also bei $x = 0$) war 180.000 €:

$$(0 \mid 180.000)$$

Der Verkaufswert 10 Jahre später ($x = 10$) liegt bei 250.000 €:

$$(10 \mid 250.000)$$

$$\begin{aligned} 180.000 &= c \cdot a^0 \\ 180.000 &= c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 250.000 &= c \cdot a^{10} \\ 250.000 &= 180.000a^{10} && \mid : 180.000 \\ 1{,}39 &= a^{10} && \mid \sqrt[10]{} \\ 1{,}03 &= a \end{aligned}$$

$$f(x) = 180.000 \cdot 1{,}03^x$$

Wegen

$$a = 1 + \frac{p}{100}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} 1{,}03 &= 1 + \frac{p}{100} && \mid -1 \\ 0{,}03 &= \frac{p}{100} && \mid \cdot 100 \\ 3 &= p \end{aligned}$$

Die prozentuale jährliche Wertsteigerung des Hauses beträgt also etwa 3%.

Aufgabe 10

$$f(x) = c \cdot a^x \qquad c > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

8 Jahre nach dem Kauf ($x = 8$) beträgt der Wert des Lieferwagens 6800 €:

$$(8 \mid 6800)$$

Außerdem wissen wir, dass der jährliche Wertverlust 15% beträgt, das heißt $p = -15$.

Mit

$$a = 1 + \frac{p}{100}$$

erhalten wir

$$a = 1 + \frac{-15}{100} = 0{,}85$$

Und somit

$$\begin{aligned} 6800 &= c \cdot 0{,}85^8 \\ 6800 &= c \cdot 0{,}85^8 \\ 6800 &= 0{,}27c \\ 25.185{,}19 &= c \end{aligned}$$

$$f(x) = 25.185{,}19 \cdot 0{,}85^x$$

Der Neupreis des Lieferwagens betrug also 25.185,19 €.

Aufgabe 11

$$f(x) = c \cdot a^x \qquad c > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

a) Pro Stunde werden 15% abgebaut, das heißt $p = -15$.

Mit

$$a = 1 + \frac{p}{100}$$

erhalten wir

$$a = 1 + \frac{-15}{100} = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$$

Nach 4 Stunden ($x = 4$) sind nur noch 10 mg Koffein im Blut vorhanden:

$$(4 \mid 10)$$

und wir bestimmen den Anfangswert c:

$$\begin{aligned} 10 &= c \cdot 0{,}85^4 & \\ 10 &= 0{,}52c & \mid : 0{,}52 \\ 19{,}23 &= c & \end{aligned}$$

Man müsste also 19,23 mg Koffein zu sich nehmen.

b) Der Anfangswert beträgt 40 mg. Nach 4 Stunden ($x = 4$) sind nur noch 10 mg Koffein im Blut vorhanden:

$$(4 \mid 10)$$

und wir bestimmen zunächst den Wachstumsfaktor a:

$$\begin{aligned} 10 &= 40 \cdot a^4 & \mid : 40 \\ 0{,}25 &= a^4 & \mid \sqrt[4]{} \\ 0{,}71 &= a & \end{aligned}$$

Mit
$$a = 1 + \frac{p}{100}$$
erhalten wir
$$\begin{aligned} 0{,}71 &= 1 + \frac{p}{100} && \mid -1 \\ -0{,}29 &= \frac{p}{100} && \mid \cdot 100 \\ -29 &= p \end{aligned}$$

Die stündliche Abbaurate (Wachstumsrate) müsste also 29% betragen.