Aufgabe 7

a) $\log_2(32) = 5, \quad \text{weil} \quad 2^5 = 32$

b) $\log_3(3) = 1, \quad \text{weil} \quad 3^1 = 3$

c) $\log_3(5) \approx 1{,}46, \quad \text{weil} \quad 3^{1{,}46} \approx 5$

d) $\log_5(125) = 3, \quad \text{weil} \quad 5^3 = 125$

e) $\log_{1{,}5}(1) = 0, \quad \text{weil} \quad 1{,}5^0 = 1$

f) $\log_2(10) \approx 3{,}32, \quad \text{weil} \quad 2^{3{,}32} \approx 10$

g) $\log_4\left(\frac{1}{4}\right) = -1, \quad \text{weil} \quad 4^{-1} = \frac{1}{4}$

h) $\log_5(30) \approx 2{,}11, \quad \text{weil} \quad 5^{2{,}11} \approx 30$

i) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3, \quad \text{weil} \quad 2^{-3} = \frac{1}{8}$

j) $\log_4(8) = 1{,}5, \quad \text{weil} \quad 4^{1{,}5} = 8$

Aufgabe 8

a)

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^x - 5 &= 100 && \mid +5 \\ 3 \cdot 2^x &= 105 && \mid :3 \\ 2^x &= 35 && \mid \log \\ x &= \log_2(35) \approx 5{,}13 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^x - 5 &= 3^x && \mid -3^x \\ 3^x - 5 &= 0 && \mid +5 \\ 3^x &= 5 && \mid \log \\ x &= \log_3(5) \approx 1{,}46 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 4^{-x} - 1 &= 3 && \mid +1 \\ 4^{-x} &= 4 && \mid \log \\ -x &= \log_4(4) \\ -x &= 1 && \mid \cdot (-1) \\ x &= -1 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} x^{-4} - 1 &= 3 && \mid +1 \\ x^{-4} &= 4 \\ \frac{1}{x^4} &= 4 && \mid \cdot x^4 \\ 1 &= 4x^4 && \mid :4 \\ \frac{1}{4} &= x^4 && \mid \sqrt[4]{} \\ 0{,}71 &\approx x \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} 2^{x+4} &= 48 \\ 2^x \cdot 2^4 &= 48 \\ 2^x \cdot 16 &= 48 && \mid :16 \\ 2^x &= 3 && \mid \log \\ x &= \log_2(3) \approx 1{,}58 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} -2x^3 &= 6000 + x^3 && \mid -x^3 \\ -3x^3 &= 6000 && \mid :(-3) \\ x^3 &= -2000 && \mid \sqrt[3]{} \\ x &\approx -12{,}6 \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 &= 6 && \mid +2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x &= 8 && \mid \log \\ x &= \log_{\frac{1}{2}}(8) = -3 \end{aligned}$$

h)

$$3^{x-1} = 3^{2x}$$

Sind die Potenzen gleich (3^{x-1} und 3^{2x}) und die Basen (3 und 3) gleich, so müssen auch die Exponenten ($x - 1$ und $2x$) gleich sein!

$$\begin{aligned} x - 1 &= 2x && \mid -x \\ -1 &= x \end{aligned}$$

i)

$$x^2 \cdot (2 + 2x) = 0$$

Nach der „Produkt gleich Null"-Regel:

$$\begin{aligned} x^2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 + 2x &= 0 && \mid -2 \\ 2x &= -2 && \mid :2 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

j)

$$(2^x - 8)(3^x - 6) = 0$$

Nach der „Produkt gleich Null"-Regel:

$$\begin{aligned} 2^x - 8 &= 0 && \mid +8 \\ 2^x &= 8 && \mid \log \\ x_1 &= \log_2(8) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^x - 6 &= 0 && \mid +6 \\ 3^x &= 6 && \mid \log \\ x_2 &= \log_3(6) \approx 1{,}63 \end{aligned}$$

k)

$$(4^x - 8)(4^x + 8) = 0$$

Nach der „Produkt gleich Null"-Regel:

$$\begin{aligned} 4^x - 8 &= 0 && \mid +8 \\ 4^x &= 8 && \mid \log \\ x_1 &= \log_4(8) = 1{,}5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^x + 8 &= 0 && \mid -8 \\ 4^x &= -8 && \mid \log \\ x_2 &= \log_4(-8) \end{aligned}$$

Keine zweite Lösung! Die einzige Lösung ist $x = 1{,}5$.

l)

$$2^x \cdot (2 + 2^{-x}) = 21$$

Es gibt keine „Produkt gleich 21"-Regel! Wir lösen die Klammern auf:

$$\begin{aligned} 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^{-x} &= 21 \\ 2^x \cdot 2^1 + 2^x \cdot 2^{-x} &= 21 \\ 2^{x+1} + 2^0 &= 21 \\ 2^{x+1} + 1 &= 21 && \mid -1 \\ 2^{x+1} &= 20 && \mid \log \\ x + 1 &= \log_2(20) \\ x + 1 &\approx 4{,}32 && \mid -1 \\ x &= 3{,}32 \end{aligned}$$