

Aufgabe 2

$$f(x) = c \cdot a^x \quad a = 1 + \frac{p}{100}$$

Um die Genauigkeit der Rechnungen zu erhöhen rechnen wir hier mit drei Nachkommastellen statt zwei!

Bulgarien

Mit $c = 6,9$ und

$$a = 1 + \frac{-0,7}{100} = 0,993$$

erhalten wir die Funktionsgleichung

$$f(x) = 6,9 \cdot 0,993^x$$

x gibt dabei die Anzahl der Jahre, die seit 2020 vergangen sind an und $f(x)$ — die Population in Millionen Einwohner.

In $2025 - 2020 = 5$ Jahren:

$$f(5) = 6,9 \cdot 0,993^5 \approx 6,662$$

Im Jahr 2025 werden in Bulgarien etwa 6,662 Millionen Menschen leben.

In $2050 - 2020 = 30$ Jahren:

$$f(30) = 6,9 \cdot 0,993^{30} \approx 5,589$$

Im Jahr 2050 werden in Bulgarien etwa 5,589 Millionen Menschen leben.

$$\begin{array}{rcl} 5 & = & 6,9 \cdot 0,993^x & | : 6,9 \\ 0,725 & = & 0,993^x & | \log \\ x & = & \log_{0,993}(0,725) \approx 45,78 & \end{array}$$

In etwa 46 Jahren, also im Jahr $2020 + 46 = 2066$ werden in Bulgarien 5 Millionen Menschen leben.

$$\begin{aligned} 3 &= 6,9 \cdot 0,993^x && | : 6,9 \\ 0,435 &= 0,993^x && | \log \\ x &= \log_{0,993}(0,435) \approx 118,499 \end{aligned}$$

In etwa 119 Jahren, also im Jahr $2020 + 119 = 2139$ werden in Bulgarien 3 Millionen Menschen leben.

Deutschland

Mit $c = 83$ und

$$a = 1 + \frac{0,2}{100} = 1,002$$

erhalten wir die Funktionsgleichung

$$f(x) = 83 \cdot 1,002^x$$

x gibt dabei die Anzahl der Jahre, die seit 2020 vergangen sind an und $f(x)$ — die Population in Millionen Einwohner.

In $2025 - 2020 = 5$ Jahren:

$$f(5) = 83 \cdot 1,002^5 \approx 83,833$$

Im Jahr 2025 werden in Deutschland etwa 83,833 Millionen Menschen leben.

In $2050 - 2020 = 30$ Jahren:

$$f(30) = 83 \cdot 1,002^{30} \approx 88,127$$

Im Jahr 2050 werden in Deutschland etwa 88,127 Millionen Menschen leben.

$$\begin{aligned} 90 &= 83 \cdot 1,002^x && | : 83 \\ 1,084 &= 1,002^x && | \log \\ x &= \log_{1,002}(1,084) \approx 40,369 \end{aligned}$$

In etwa 41 Jahren, also im Jahr $2020 + 41 = 2061$ werden in Deutschland 90 Millionen Menschen leben.

$$\begin{aligned} 100 &= 83 \cdot 1,002^x && | : 83 \\ 1,205 &= 1,002^x && | \log \\ x &= \log_{1,002}(1,205) \approx 93,333 \end{aligned}$$

In etwa 94 Jahren, also im Jahr $2020 + 94 = 2114$ werden in Deutschland 100 Millionen Menschen leben.

Madagaskar

Mit $c = 27,7$ und

$$a = 1 + \frac{2,6}{100} = 1,026$$

erhalten wir die Funktionsgleichung

$$f(x) = 27,7 \cdot 1,026^x$$

x gibt dabei die Anzahl der Jahre, die seit 2020 vergangen sind an und $f(x)$ — die Population in Millionen Einwohner.

In $2025 - 2020 = 5$ Jahren:

$$f(5) = 27,7 \cdot 1,026^5 \approx 31,493$$

Im Jahr 2025 werden in Madagaskar etwa 31,493 Millionen Menschen leben.

In $2050 - 2020 = 30$ Jahren:

$$f(30) = 27,7 \cdot 1,026^{30} \approx 59,827$$

Im Jahr 2050 werden in Madagaskar etwa 59.827 Millionen Menschen leben.

$$\begin{aligned} 35 &= 27,7 \cdot 1,026^x && | : 27,7 \\ 1,264 &= 1,026^x && | \log \\ x &= \log_{1,026}(1,264) \approx 9,127 \end{aligned}$$

In etwa 10 Jahren, also im Jahr $2020 + 10 = 2030$ werden in Madagaskar 35 Millionen Menschen leben.

$$\begin{aligned} 50 &= 27,7 \cdot 1,026^x && | : 27,7 \\ 1,805 &= 1,026^x && | \log \\ x &= \log_{1,026}(1,805) \approx 23,008 \end{aligned}$$

In etwa 24 Jahren, also im Jahr $2020 + 24 = 2044$ werden in Madagaskar 50 Millionen Menschen leben.

Alle unsere Berechnungen bleiben nur dann (annähernd) korrekt, wenn die tatsächliche Bevölkerungsentwicklung sich in der Zukunft wie durch das jeweilige Modell beschrieben fortsetzen wird!

Aufgabe 3

$$f(x) = c \cdot a^x \quad a = 1 + \frac{p}{100}$$

Um die Genauigkeit der Rechnungen zu erhöhen rechnen wir hier mit drei Nachkommastellen statt zwei!

Aktienfond A

Mit $c = 2000$ und

$$a = 1 + \frac{6}{100} = 1,06$$

erhalten wir die Funktionsgleichung

$$f(x) = 2000 \cdot 1,06^x$$

x gibt dabei die Anzahl der Jahre, die seit 2020 vergangen sind an und $f(x)$ — den Wert des Aktienfonds in Euro.

In $2024 - 2020 = 4$ Jahren:

$$f(4) = 2000 \cdot 1,06^4 \approx 2524,954$$

Im Jahr 2024 wird der Wert des Fonds A etwa 2524,95 € betragen.

In 2032 – 2020 = 12 Jahren:

$$f(12) = 2000 \cdot 1,06^{12} \approx 4024,393$$

Im Jahr 2032 wird der Wert des Fonds A etwa 4024,39 € betragen.

$$\begin{aligned} 3000 &= 2000 \cdot 1,06^x && | : 2000 \\ 1,5 &= 1,06^x && | \log \\ x &= \log_{1,06}(1,5) \approx 6,959 \end{aligned}$$

In etwa 7 Jahren, also im Jahr 2020 + 7 = 2027 wird der Fond A 3000 € wert sein.

$$\begin{aligned} 7500 &= 2000 \cdot 1,06^x && | : 2000 \\ 3,75 &= 1,06^x && | \log \\ x &= \log_{1,06}(3,75) \approx 22,684 \end{aligned}$$

In etwa 23 Jahren, also im Jahr 2020 + 23 = 2043 wird der Fond A 7500 € wert sein.

Aktienfond B

Mit $c = 13.000$ und

$$a = 1 + \frac{3,5}{100} = 1,035$$

erhalten wir die Funktionsgleichung

$$f(x) = 13.000 \cdot 1,035^x$$

x gibt dabei die Anzahl der Jahre, die seit 2020 vergangen sind an und $f(x)$ — den Wert des Aktienfonds in Euro.

In 2024 – 2020 = 4 Jahren:

$$f(4) = 13.000 \cdot 1,035^4 \approx 14.917,799$$

Im Jahr 2024 wird der Wert des Fonds B etwa 14.917,80 € betragen.

In 2032 – 2020 = 12 Jahren:

$$f(12) = 13.000 \cdot 1,035^{12} \approx 19.643,893$$

Im Jahr 2032 wird der Wert des Fonds B etwa 19.643,89 € betragen.

$$\begin{aligned} 16.000 &= 13.000 \cdot 1,035^x && | : 13.000 \\ 1,231 &= 1,035^x && | \log \\ x &= \log_{1,035}(1,231) \approx 6,041 \end{aligned}$$

In etwa 7 Jahren, also im Jahr $2020 + 7 = 2027$ wird der Fond B 16.000 € wert sein.

$$\begin{aligned} 40.000 &= 13.000 \cdot 1,035^x && | : 13.000 \\ 3,077 &= 1,035^x && | \log \\ x &= \log_{1,035}(3,077) \approx 32,672 \end{aligned}$$

In etwa 33 Jahren, also im Jahr $2020 + 33 = 2053$ wird der Fond B 40.000 € wert sein.

Aktienfond C

Mit $c = 7000$ und

$$a = 1 + \frac{-0,4}{100} = 0,996$$

erhalten wir die Funktionsgleichung

$$f(x) = 7000 \cdot 0,996^x$$

x gibt dabei die Anzahl der Jahre, die seit 2020 vergangen sind an und $f(x)$ — den Wert des Aktienfonds in Euro.

In $2024 - 2020 = 4$ Jahren:

$$f(4) = 7000 \cdot 0,996^4 \approx 6888,67$$

Im Jahr 2024 wird der Wert des Fonds C etwa 6888,67 € betragen.

In $2032 - 2020 = 12$ Jahren:

$$f(12) = 7000 \cdot 0,996^{12} \approx 6671,294$$

Im Jahr 2032 wird der Wert des Fonds C etwa 6671,29 € betragen.

$$\begin{aligned} 6500 &= 7000 \cdot 0,996^x && | : 7000 \\ 0,929 &= 0,996^x && | \log \\ x &= \log_{0,996}(0,929) \approx 18,375 \end{aligned}$$

In etwa 19 Jahren, also im Jahr $2020 + 19 = 2039$ wird der Fond C 6500 € wert sein.

$$\begin{aligned} 6000 &= 7000 \cdot 0,996^x && | : 7000 \\ 0,857 &= 0,996^x && | \log \\ x &= \log_{0,996}(0,857) \approx 38,502 \end{aligned}$$

In etwa 39 Jahren, also im Jahr $2020 + 39 = 2059$ wird der Fond C 6000 € wert sein.

Alle unsere Berechnungen bleiben nur dann (annähernd) korrekt, wenn die tatsächliche Wertentwicklung sich in der Zukunft wie durch das jeweilige Modell beschrieben fortsetzen wird!