Aufgabe 5

a) Die Anfangsmenge Radium (die Menge zum Zeitpunkt 0) ist 30 g, also muss $a = 30$ sein.

Die Halbwertzeit ist die Zeit, die vergeht, bis die Hälfte der Atome zerfallen ist. Um die Anfangsmenge zu halbieren soll der Wachstumsfaktor $b = 0{,}5$ sein (Multiplikation mit 0,5 ist nichts anderes als Division durch 2). Hätten wir aber die Gleichung

$$f(t) = 30 \cdot 0{,}5^t$$

aufgestellt, so würde es heißen, dass die Anfangsmenge sich schon nach einem Jahr ($t = 1$) halbiert, weil

$$f(1) = 30 \cdot 0{,}5^1 = 30 \cdot 0{,}5 = 15\ [g].$$

Die Funktionsgleichung

$$f(t) = 30 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{1620}}$$

stimmt also, weil wenn wir den Exponenten $\frac{t}{1620}$ nutzen, zerfällt die Hälfte der Atome erst nach 1620 Jahren ($t = 1620$):

$$f(1620) = 30 \cdot 0{,}5^{\frac{1620}{1620}} = 30 \cdot 0{,}5^1 = 30 \cdot 0{,}5 = 15\ [g],$$

wie durch die Aufgabenstellung vorgegeben.

Nach 400 Jahren sind

$$f(400) = 30 \cdot 0{,}5^{\frac{400}{1620}} \approx 25{,}28\ [g]$$

also etwa 25,28 g übrig.

Soll nur 1 g Radium übrig bleiben, so lautet die Gleichung:

$$\begin{aligned}
1 &= 30 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{1620}} && \mid :30 \\
\frac{1}{30} &= 0{,}5^{\frac{t}{1620}} && \mid \log \\
\frac{t}{1620} &= \log_{0,5}\left(\frac{1}{30}\right) && \mid \cdot 1620 \\
t &= 1620 \cdot \log_{0,5}\left(\frac{1}{30}\right) \approx 7949{,}16\ [Jahren]
\end{aligned}$$

Ein Gramm bleibt also nach etwa 7949 Jahren übrig.

Ändert man die Anfangsmenge a, so lautet die neue Funktionsgleichung

$$f(t) = 100 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{1620}}$$

Die Halbwertzeit bleibt aber gleich, wie die folgende Rechnung zeigt:

$$f(1620) = 100 \cdot 0{,}5^{\frac{1620}{1620}} = 100 \cdot 0{,}5 = 50$$

Nach 1620 Jahren sind also 50 von 100 g (also die Hälfte) übrig geblieben.

b)

$$f(x) = a \cdot b^x \qquad b = 1 + \frac{p}{100}$$

Die Anfangsbevölkerung beträgt 5 Millionen also $a = 5$. Die Bevölkerung wächst, also

$$b = 1 + \frac{4}{100} = 1{,}04$$

und damit erhalten wir die Funktionsgleichung

$$f(x) = 5 \cdot 1{,}04^x$$

wobei die Zeit x in Jahren und die Bevölkerung $f(x)$ in Millionen Menschen gemessen wird.

Verdopplung heißt, dass aus 5 Millionen 10 Millionen werden, also $f(x) = 10$:

$$\begin{aligned} 10 &= 5 \cdot 1{,}04^x && \mid :5 \\ 2 &= 1{,}04^x && \mid \log \\ x &= \log_{1{,}04}(2) \approx 17{,}6730\ [\mathit{Jahren}] \end{aligned}$$

Die Bevölkerung wird sich nach etwas weniger als 18 Jahren verdoppeln.

Die Funktion

$$f(t) = 5 \cdot 2^{\frac{1}{17{,}6730} \cdot t}$$

mit $a = 5$ und $b = 2$ beschreibt die gleiche Bevölkerungsentwicklung, weil

$$f(17{,}6730) = 5 \cdot 2^{\frac{1}{17{,}6730} \cdot 17{,}6730} = 5 \cdot 2^1 = 5 \cdot 2 = 10$$

auch hier wird t in Jahren und $f(t)$ in Millionen Menschen angegeben.

Ist die Anfangsbevölkerung $a = 2$ und bleibt $b = 1 + \frac{4}{100} = 1{,}04$, so lautet die Funktionsgleichung

$$f(x) = 2 \cdot 1{,}04^x$$

und auch hier ändert sich die Verdopplungszeit nicht:

$$\begin{aligned} 4 &= 2 \cdot 1{,}04^x && \mid :2 \\ 2 &= 1{,}04^x && \mid \log \\ x &= \log_{1{,}04}(2) \approx 17{,}6730\ [\mathit{Jahren}] \end{aligned}$$

Mit einem beliebigen Anfangsbestand a erhalten wir:

$$f(x) = a \cdot 1{,}04^x$$

und somit:

$$\begin{aligned} 2a &= a \cdot 1{,}04^x && \mid :a \\ 2 &= 1{,}04^x && \mid \log \\ x &= \log_{1{,}04}(2) \approx 17{,}6730\ [\mathit{Jahren}] \end{aligned}$$

Aufgabe 6

$$f(t) = a \cdot b^t \qquad b = 1 + \frac{p}{100}$$

a) Nach $t = 10$ Jahren hat sich der Anfangsbestand a verdoppelt (aus a wird $2a$), also:

$$\begin{aligned} 2a &= a \cdot b^{10} && \mid :a \\ 2 &= b^{10} && \mid \sqrt[10]{} \\ b &= \sqrt[10]{2} \approx 1{,}07 \end{aligned}$$

Der jährliche Wachstumsfaktor $b = \sqrt[10]{2} \approx 1{,}07$.

Hat sich der Anfangsbestand a nach $t = 10$ Jahren halbiert (aus a wird $0{,}5a$), so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0{,}5a &= a \cdot b^{10} && \mid :a \\ 0{,}5 &= b^{10} && \mid \sqrt[10]{} \\ b &= \sqrt[10]{0{,}5} \approx 0{,}93 \end{aligned}$$

Der jährliche Wachstumsfaktor $b = \sqrt[10]{0{,}5} \approx 0{,}93$.

b) Und nun ohne einen Wert für t einzusetzen. Nach t_D (das ist <u>ein</u> Wert!) Jahren hat sich der Anfangsbestand a verdoppelt (aus a wird $2a$), also:

$$\begin{aligned} 2a &= a \cdot b^{t_D} && \mid : a \\ 2 &= b^{t_D} && \mid \sqrt[t_D]{} \\ b &= \sqrt[t_D]{2} \end{aligned}$$

Der jährliche Wachstumsfaktor $b = \sqrt[t_D]{2}$ („t-D-te Wurzel aus 2").

Hat sich der Anfangsbestand a nach t_H (auch das ist <u>ein</u> Wert!) Jahren halbiert (aus a wird $0{,}5a$), so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0{,}5a &= a \cdot b^{t_H} && \mid : a \\ 0{,}5 &= b^{t_H} && \mid \sqrt[t_H]{} \\ b &= \sqrt[t_H]{0{,}5} \end{aligned}$$

Der jährliche Wachstumsfaktor $b = \sqrt[t_D]{0{,}5}$ („t-D-te Wurzel aus 0,5").

Laut der Funktionsgleichung

$$f(t) = a \cdot 2^{\frac{t}{t_D}}$$

wird sich der Anfangsbestand a nach exakt t_D Jahren verdoppeln, weil:

$$f(t_D) = a \cdot 2^{\frac{t_D}{t_D}} = a \cdot 2^1 = a \cdot 2 = 2a$$

Entsprechend wird sich der Anfangsbestand a laut der Funktionsgleichung

$$f(t) = a \cdot 0{,}5^{\frac{t}{t_H}}$$

nach exakt t_H Jahren halbieren, weil:

$$f(t_H) = a \cdot 0{,}5^{\frac{t_H}{t_H}} = a \cdot 0{,}5^1 = a \cdot 0{,}5 = 0{,}5a$$

Somit stimmen beide Gleichungen.