Aufgabe 10

1)

$$K(x) = 70 \cdot 0{,}86^x + 20$$

Zum Zeitpunkt $x = 0$ (beim Aufgießen) erhalten wir

$$K(0) = 70 \cdot 0{,}86^0 + 20 = 90\ [°C]$$

Der Kaffee ist beim Aufgießen also $90°C$ heiß.

Zum Zeitpunkt $x = 5$ (5 Minuten später):

$$K(5) = 70 \cdot 0{,}86^5 + 20 \approx 52{,}93\ [°C]$$

5 Minuten später ist der Kaffee nur $52{,}93°C$ heiß.

Mit $K(x) = 60$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} 60 &= 70 \cdot 0{,}86^x + 20 && | -20 \\ 40 &= 70 \cdot 0{,}86^x && | : 70 \\ 0{,}57 &= 0{,}86^x && | \log \\ x &= \log_{0{,}86}(0{,}57) \approx 3{,}71\ [min] \end{aligned}$$

Und mit $K(x) = 30$ folgt:

$$\begin{aligned} 30 &= 70 \cdot 0{,}86^x + 20 && | -20 \\ 10 &= 70 \cdot 0{,}86^x && | : 70 \\ 0{,}14 &= 0{,}86^x && | \log \\ x &= \log_{0{,}86}(0{,}14) \approx 12{,}9\ [min] \end{aligned}$$

Nach etwa 3,71 Minuten ist der Kaffee $60°C$ heiß und nach etwa 12,9 Minuten ist er $30°C$ heiß.

Langfristig ist zu erwarten, dass der Kaffee immer kühler wird, jedoch nicht kühler als $20°C$ (die Raumtemperatur). Je größer ist der Wert von x (je mehr Zeit vergeht), desto kleiner ist der Wert von $70 \cdot 0{,}86^x$. So ist $70 \cdot 0{,}86^{30} \approx 0{,}76$ und $70 \cdot 0{,}86^{60} \approx 0{,}008$, somit kommt der Funktionswert $K(x)$ immer näher zu (strebt gegen) $20°C$.

2)

$$O(x) = -18 \cdot 0{,}86^x + 25$$

Zum Zeitpunkt $x = 0$ (beim Eingießen) erhalten wir

$$O(0) = -18 \cdot 0{,}86^0 + 25 = 7\ [°C]$$

Die Temperatur vom Orangensaft beträgt also $7°C$.

Zum Zeitpunkt $x = 5$ (nach 5 Minuten):

$$O(5) = -18 \cdot 0{,}86^5 + 25 = 16{,}53\ [°C]$$

5 Minuten später ist der Orangensaft schon $16{,}53°C$ warm.

Mit $O(x) = 15$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} 15 &= -18 \cdot 0{,}86^x + 25 && \mid -25 \\ -10 &= -18 \cdot 0{,}86^x && \mid : (-18) \\ 0{,}06 &= 0{,}86^x && \mid \log \\ x &\approx 3{,}9\ [min] \end{aligned}$$

Und mit $O(x) = 20$ folgt:

$$\begin{aligned} 20 &= -18 \cdot 0{,}86^x + 25 && \mid -25 \\ -5 &= -18 \cdot 0{,}86^x && \mid : (-18) \\ 0{,}28 &= 0{,}86^x && \mid \log \\ x &\approx 8{,}49\ [min] \end{aligned}$$

Nach etwa 3,9 Minuten ist der Saft $15°C$ warm und nach etwa 8,49 Minuten ist er $20°C$ warm.

Langfristig ist zu erwarten, dass der Saft immer wärmer wird, jedoch nicht wärmer als $25°C$ (die Raumtemperatur). Je größer ist der Wert von x (je mehr Zeit vergeht), desto kleiner ist der Wert von $-18 \cdot 0{,}86^x$. So ist $-18 \cdot 0{,}86^{30} \approx -0{,}2$ und $-18 \cdot 0{,}86^{60} \approx -0{,}002$, somit kommt der Funktionswert $K(x)$ immer näher zu (strebt gegen) $25°C$.

Die gleiche Temperatur heißt $K(x) = O(x)$:

$$\begin{aligned}
70 \cdot 0{,}86^x + 20 &= -18 \cdot 0{,}86^x + 25 && | -20 \\
70 \cdot 0{,}86^x &= -18 \cdot 0{,}86^x + 5 && | +18 \cdot 0{,}86^x \\
88 \cdot 0{,}86^x &= 5 && | : 880{,}86^x \quad = 0{,}06 \quad | \log \\
x &\approx 19{,}02\ [min]
\end{aligned}$$

Nach etwa 19,02 Minuten besitzen der Kaffee und der Orangensaft die gleiche Temperatur.

Die Asymptoten ($y = 20$ und $y = 25$) geben die jeweils tiefste (bei dem sich abkühlenden Kaffee) bzw. höchste (bei dem sich erwärmenden Orangensaft) mögliche Temperatur (Grenzwert), die jedoch nie erreicht wird.

Ein anderer Wachstumsfaktor würde einen anderen Temperaturverlauf als Folge haben. Die Asymptoten würden dabei unverändert bleiben.