Aufgabe 7

$$f(x) = c \cdot a^x \qquad a = 1 + \frac{p}{100}$$

Um die Genauigkeit der Rechnungen zu erhöhen rechnen wir hier mit vier Nachkommastellen statt zwei!

a) *Radium (^{226}Ra):* Nach der Halbwertzeit zerfällt die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Atome, das heißt:

$$\begin{aligned} 0{,}5 &= 1 \cdot a^{1602} && \mid \sqrt[1602]{} \\ 0{,}9996 &\approx a \end{aligned}$$

Wobei x (die Zeit) in Jahren gemessen wird!

Cäsium (^{137}Cs):

$$\begin{aligned} 0{,}5 &= 1 \cdot a^{30} && \mid \sqrt[30]{} \\ 0{,}9771 &\approx a \end{aligned}$$

Wobei x (die Zeit) in Jahren gemessen wird!

Radon (^{222}Rn):

$$\begin{aligned} 0{,}5 &= 1 \cdot a^{3{,}8} && \mid \sqrt[3{,}8]{} \\ 0{,}8333 &\approx a \end{aligned}$$

Wobei x (die Zeit) in Tagen gemessen wird!

b) Nach $2024 - 1986 = 38$ Jahren erhalten wir mit dem Anfangswert $c = 1$ (steht für die ursprüngliche Menge an Cäsium) und dem Wachstumsfaktor $a = 0{,}9771$ $\big($siehe (a)$\big)$:

$$f(38) = 1 \cdot 0{,}9771^{38} \approx 0{,}4147$$

In der Umwelt immer noch vorhanden sind also etwa

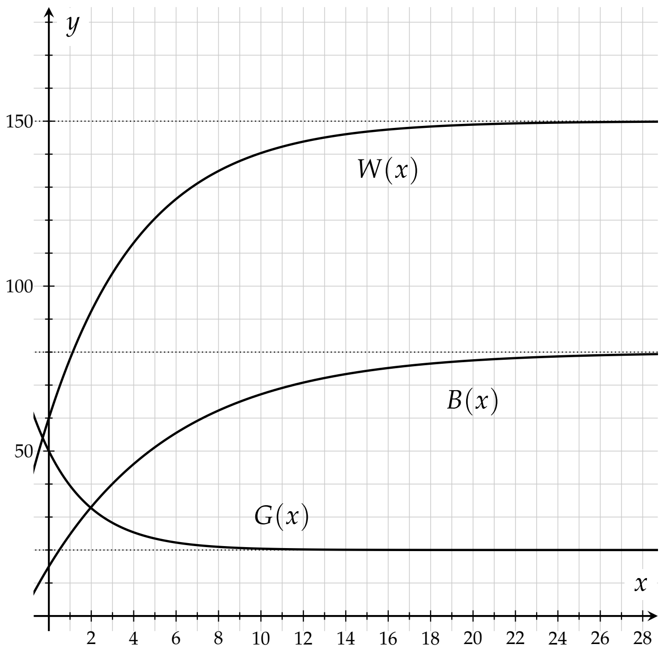
$$0{,}4147 \cdot 100 = 41{,}47\%$$

der ursprünglichen Cäsium-Menge.

Aufgabe 9

a)

$$\begin{aligned} W(x) &= -90 \cdot 0{,}8^x + 150 \\ B(x) &= -65 \cdot 0{,}85^x + 80 \\ G(x) &= 30 \cdot 0{,}65^x + 20 \end{aligned}$$



b)

$$W(0) = -90 \cdot 0{,}8^0 + 150 = -90 + 150 = 60$$
$$B(0) = -65 \cdot 0{,}85^0 + 80 = -65 + 80 = 15$$
$$G(0) = 30 \cdot 0{,}65^0 + 20 = 30 + 20 = 50$$

Demnach gab es zu Beginn der Modellierung 60 Wildschweine, 15 Bären und 50 Greifvögel im Wald.

c)

$$W(5) = -90 \cdot 0{,}8^5 + 150 = 120{,}51$$
$$B(5) = -65 \cdot 0{,}85^5 + 80 = 51{,}16$$
$$G(5) = 30 \cdot 0{,}65^5 + 20 = 23{,}48$$

Demnach wird es in 5 Jahren 120 Wildschweine, 51 Bären und 23 Greifvögel im Wald geben.

d)

$$W(x) = -90 \cdot 0{,}8^x + 150$$

$$\begin{aligned} 100 &= -90 \cdot 0{,}8^x + 150 && \mid -150 \\ -50 &= -90 \cdot 0{,}8^x && \mid :(-90) \\ 0{,}56 &= 0{,}8^x && \mid \log \\ x &= \log_{0{,}8}(0{,}56) \approx 2{,}6 \end{aligned}$$

In etwa 3 Jahren wird es 100 Wildschweine im Wald geben.

$$B(x) = -65 \cdot 0{,}85^x + 80$$

$$\begin{aligned} 70 &= -65 \cdot 0{,}85^x + 80 && \mid -80 \\ -10 &= -65 \cdot 0{,}85^x && \mid :(-65) \\ 0{,}15 &= 0{,}85^x && \mid \log \\ x &= \log_{0{,}85}(0{,}15) \approx 11{,}67 \end{aligned}$$

In etwa 12 Jahren wird es 70 Bären im Wald geben.

$$G(x) = 30 \cdot 0{,}65^x + 20$$

$$\begin{aligned} 30 &= 30 \cdot 0{,}65^x + 20 && \mid -20 \\ 10 &= 30 \cdot 0{,}65^x && \mid :30 \\ 0{,}33 &= 0{,}65^x && \mid \log \\ x &= \log_{0{,}65}(0{,}33) \approx 2{,}57 \end{aligned}$$

In etwa 3 Jahren wird es 30 Greifvögel im Wald geben.

e) In der Zukunft werden die Populationen der Wildschweine und der Bären immer langsamer wachsen. Dabei werden sie immer unter dem jeweiligen theoretischen Maximum (150 bzw. 80) bleiben.

Die Greifvögelpopulation wird weiter schrumpfen, das theoretische Minimum (20) wird jedoch nie erreicht.

Alle unsere Berechnungen bleiben nur dann (annähernd) korrekt, wenn die tatsächliche Populationsentwicklung sich in der Zukunft wie durch das jeweilige Modell beschrieben fortsetzen wird!