Aufgabe 6

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x + 1, \qquad x_0 = 0 \\ n(x) &= x + 1 \end{aligned}$$

$$f(0) = 0^3 - 0 + 1 = 1$$

$$P\,(0 \mid 1)$$

$$t(x) = m_t \cdot x + b$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 1 \\ m_t &= f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t(x) &= -x + b \\ 1 &= -0 + b \\ 1 &= b \end{aligned}$$

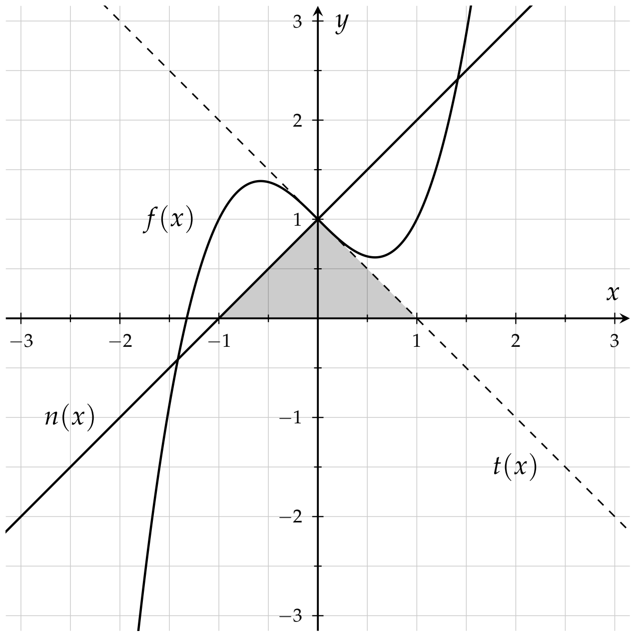
$$t(x) = -x + 1$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

Die Tangente $t(x)$ und die Normale $n(x)$ schneiden die y-Achse bei $y = 1$. Die Höhe h ist also gleich 1 LE.

$$\begin{aligned} n(x) &= 0 \\ x + 1 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t(x) &= 0 \\ -x + 1 &= 0 \\ 1 &= x \end{aligned}$$



Die Normale $n(x)$ schneidet die x-Achse an der Stelle $x = -1$ und die Tangente $t(x)$ schneidet sie an der Stelle $x = 1$, somit ist die Grundseite

$$g = 1 - (-1) = 2\ [LE]$$

lang.

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1\ [FE]$$

b)

$$f(x) = 0{,}5x^2 + 2, \qquad x_0 = 2$$
$$n(x) = -0{,}5x + 5$$

$$f(2) = 0{,}5 \cdot 2^2 + 2 = 4$$

$$P\,(2 \mid 4)$$

$$t(x) = m_t \cdot x + b$$

$$f'(x) = x$$
$$m_t = f'(2) = 2$$

$$t(x) = 2x + b$$
$$4 = 2 \cdot 2 + b$$
$$4 = 4 + b$$
$$0 = b$$

$$t(x) = 2x$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

$$t(x) = n(x)$$
$$2x = -0{,}5x + 5$$
$$2{,}5x = 5$$
$$x = 2$$

$$t(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

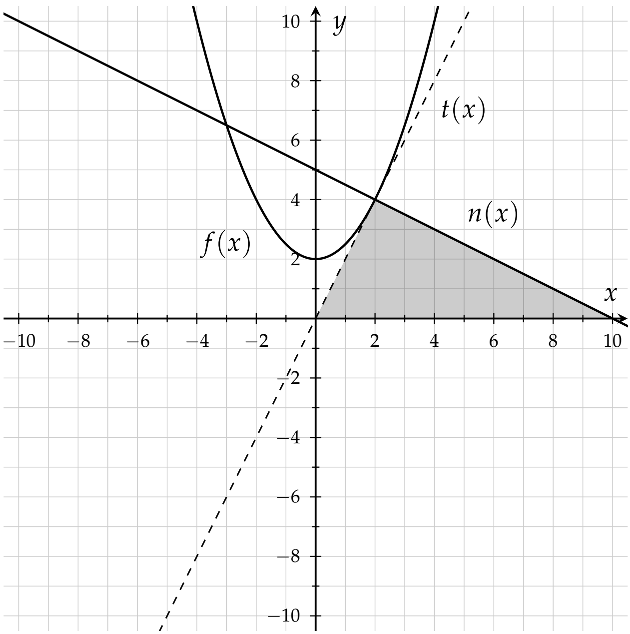
Die Tangente $t(x)$ und die Normale $n(x)$ schneiden sich im Punkt

$$(2 \mid 4)$$

Das Dreieck ist also 4 *LE* hoch.

$$
\begin{aligned}
t(x) &= 0 \\
2x &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n(x) &= 0 \\
-0{,}5x + 5 &= 0 \\
-0{,}5x &= -5 \\
x &= 10
\end{aligned}
$$



Die Tangente $t(x)$ schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 0$ und die Normale $n(x)$ schneidet sie an der Stelle $x = 10$, somit ist die

Grundseite

$$g = 10 - 0 = 10\ [LE]$$

lang.

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20\ [FE]$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 1, \qquad x_0 = -1 \\ n(x) &= -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 1 = -2$$

$$P\,(-1 \mid -2)$$

$$t(x) = m_t \cdot x + b$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \\ m_t &= f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t(x) &= 3x + b \\ -2 &= 3 \cdot (-1) + b \\ -2 &= -3 + b \\ 1 &= b \end{aligned}$$

$$t(x) = 3x + 1$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

$$\begin{aligned} t(x) &= n(x) \\ 3x + 1 &= -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3} \\ \frac{10}{3}x + 1 &= -\frac{7}{3} \\ \frac{10}{3}x &= -\frac{10}{3} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$t(-1) = 3 \cdot (-1) + 1 = -2$$

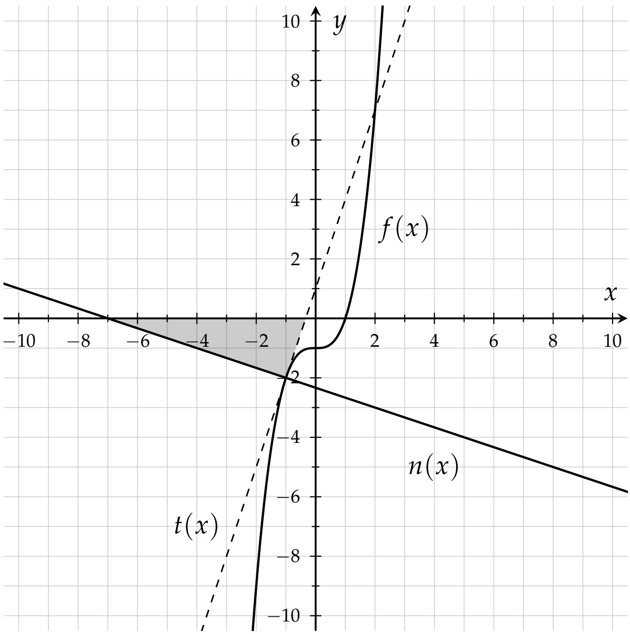
Die Tangente $t(x)$ und die Normale $n(x)$ schneiden sich im Punkt

$$(-1 \mid -2)$$

Das Dreieck ist also 2 LE hoch.

$$\begin{aligned} t(x) &= 0 \\ 3x + 1 &= 0 \\ 3x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n(x) &= 0 \\ -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3} &= 0 \\ -\frac{1}{3}x &= \frac{7}{3} \\ x &= -7 \end{aligned}$$



Die Tangente $t(x)$ schneidet die x-Achse an der Stelle $x = -\frac{1}{3}$ und die Normale $n(x)$ schneidet sie an der Stelle $x = -7$, somit ist die Grundseite

$$g = -\frac{1}{3} - (-7) = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}\ [LE]$$

lang.

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 6\frac{2}{3} \cdot 2 = 6\frac{2}{3}\ [FE]$$