

Aufgabe 10

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Die Höhe beider Zylinder sei h und der Radius sei r .

Der blaue Kegel ist gleich hoch wie der Zylinder, der ihn enthält:

$$h_{\text{blau}} = h$$

$$V_{\text{blau}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Ein (!) orangefarbene Kegel ist halb so hoch, wie der Zylinder, der ihn enthält:

$$h_{\text{orange}} = \frac{h}{2}$$

$$V_{\text{orange}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{h}{2}$$

Der orangefarbene „Sanduhr“-Körper besteht aus zwei orangefarbenen Kegeln, also:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{h}{2}}_{V_{\text{orange}}} &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2 \cdot \frac{h}{2} \\ &= \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}_{V_{\text{blau}}} \end{aligned}$$

Die Volumina des blauen Kegels und des orangefarbenen „Sanduhr“-Körpers sind also gleich!

Nun vergleichen wir die Mantelflächen:

$$M_{\text{Kegel}} = \pi \cdot r \cdot s$$

Der blaue Kegel ist gleich hoch wie der Zylinder, der ihn enthält:

$$h_{\text{blau}} = h$$

Nach dem Satz des Pythagoras folgt:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$s^2 = h^2 + r^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$s = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$M_{\text{blau}} = \pi \cdot r \cdot \sqrt{h^2 + r^2}$$

Der orangefarbene Kegel ist halb so hoch, wie der Zylinder, der ihn enthält:

$$h_{\text{orange}} = \frac{h}{2}$$

Nach dem Satz des Pythagoras:

$$s^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2$$

$$s^2 = \frac{h^2}{4} + r^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$s = \sqrt{\frac{h^2}{4} + r^2}$$

$$M_{\text{orange}} = \pi \cdot r \cdot \sqrt{\frac{h^2}{4} + r^2}$$

Die orangefarbene Mantelfläche des „Sanduhr“-Körpers besteht aus zwei orangefarbenen Mantelflächen, also:

$$\begin{aligned} \underbrace{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sqrt{\frac{h^2}{4} + r^2}}_{M_{\text{orange}}} &= \pi \cdot r \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{h^2}{4} + r^2} \\ &= \pi \cdot r \cdot \sqrt{4 \cdot \frac{h^2}{4} + r^2} \\ &= \underbrace{\pi \cdot r \cdot \sqrt{h^2 + r^2}}_{M_{\text{blau}}} \end{aligned}$$

Die Oberflächeninhalte des blauen Kegels und des orangefarbenen „Sanduhr“-Körpers sind also gleich!