

### Aufgabe 3

a)

$$f(x) = 0,5x^2 - 2x$$

$$f'(x) = x - 2$$

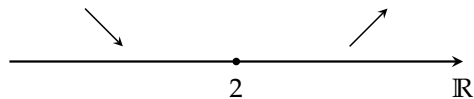
Notwendige Bedingung:  $f'(x) = 0$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei  $f'(x)$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1) = 1 - 2 = -1 < 0 \\ f'(3) = 3 - 2 = 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{lokaler Tiefpunkt bei } x = 2$$



$$f(2) = 0,5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = -2$$

Der Graph von  $f$  besitzt an der Stelle  $x = 2$  einen lokalen Tiefpunkt mit den Koordinaten  $T(2 \mid -2)$ .

Der Punkt  $T$  ist ein globaler Tiefpunkt. Es existiert kein globaler Hochpunkt.

b)

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$$

$$f'(x) = x^2 - 4$$

Notwendige Bedingung:  $f'(x) = 0$

$$x^2 - 4 = 0$$

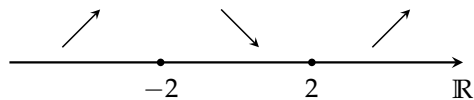
$$x^2 = 4$$

$$x_{1,2} = \pm 2$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei  $f'(x)$

$$\left. \begin{array}{l} f'(-3) = (-3)^2 - 4 = 5 > 0 \\ f'(0) = 0^2 - 4 = -4 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{lokaler Hochpunkt} \\ \text{bei } x = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = -4 < 0 \\ f'(3) = (3)^2 - 4 = 5 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{lokaler Tiefpunkt} \\ \text{bei } x = 2$$



$$f(-2) = \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) = 5\frac{1}{3}$$

$$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 = -5\frac{1}{3}$$

Der Graph von  $f$  besitzt an der Stelle  $x = -2$  einen lokalen Hochpunkt mit den Koordinaten  $H\left(-2 \mid 5\frac{1}{3}\right)$  und an der Stelle  $x = 2$  einen lokalen Tiefpunkt mit den Koordinaten  $T\left(2 \mid -5\frac{1}{3}\right)$ .

Es existiert weder ein globaler Hochpunkt noch ein globaler Tiefpunkt.

c)

$$f(x) = x^5 + x^3$$

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2$$

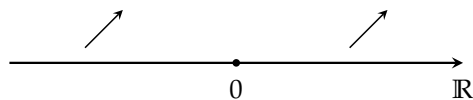
Notwendige Bedingung:  $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 5x^4 + 3x^2 &= 0 \\ x^2 \cdot (5x^2 + 3) &= 0 \\ x^2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ 5x^2 + 3 &= 0 \\ 5x^2 &= -3 \\ x^2 &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Keine Lösung außer  $x = 0$ .

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei  $f'(x)$

$$\left. \begin{aligned} f'(-1) &= 5 \cdot (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^2 = 8 > 0 \\ f'(1) &= 5 \cdot 1^4 + 3 \cdot 1^2 = 8 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Sattelpunkt bei } x = 0$$



$$f(0) = 0^5 + 0^3 = 0$$

Der Graph von  $f$  besitzt an der Stelle  $x = 0$  einen Sattelpunkt mit den Koordinaten  $S(0 | 0)$ .

Es existiert weder ein globaler Hochpunkt noch ein globaler Tiefpunkt.

**d)**

$$\begin{aligned} f(x) &= -0,5x^4 + 2x^3 - 2x^2 \\ f'(x) &= -2x^3 + 6x^2 - 4x \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:  $f'(x) = 0$

$$-2x^3 + 6x^2 - 4x = 0$$

$$-2x \cdot (x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$-2x = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}$$

$$= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

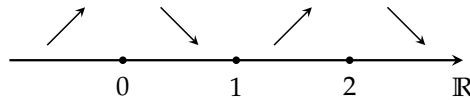
$$x_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei  $f'(x)$

$$\left. \begin{aligned} f'(-1) &= -2 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \\ &= 12 > 0 \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) &= -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{3}{4} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{lokaler Hochpunkt bei } x = 0$$

$$\left. \begin{aligned}
 f' \left( \frac{1}{2} \right) &= -\frac{3}{4} < 0 \\
 f' \left( \frac{3}{2} \right) &= -2 \cdot \left( \frac{3}{2} \right)^3 + 6 \cdot \left( \frac{3}{2} \right)^2 - 4 \cdot \left( \frac{3}{2} \right) \\
 &= \frac{3}{4} > 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{lokaler Tiefpunkt bei } x = 1$$

$$\left. \begin{aligned}
 f' \left( \frac{3}{2} \right) &= \frac{3}{4} > 0 \\
 f'(3) &= -2 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 \\
 &= -12 < 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{lokaler Hochpunkt bei } x = 2$$



$$f(0) = -0,5 \cdot (0)^4 + 2 \cdot (0)^3 - 2 \cdot (0)^2 = 0$$

$$f(1) = -0,5 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 = -0,5$$

$$f(2) = -0,5 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 = 0$$

Der Graph von  $f$  besitzt an der Stelle  $x = 0$  einen lokalen Hochpunkt mit den Koordinaten  $T_1(0 | 0)$ , an der Stelle  $x = 1$  einen lokalen Tiefpunkt mit den Koordinaten  $H(1 | 0)$  und an der Stelle  $x = 2$  einen lokalen Hochpunkt mit den Koordinaten  $T_2(2 | 0)$ .

Die Punkte  $T_1$  und  $T_2$  befinden sich auf gleicher Höhe und sind somit beide globale Hochpunkte. Es existiert kein globaler Tiefpunkt.

e)

$$f(x) = 0,02x^5 - 0,1x^4$$

$$f'(x) = 0,1x^4 - 0,4x^3$$

Notwendige Bedingung:  $f'(x) = 0$

$$0,1x^4 - 0,4x^3 = 0$$

$$0,1x^3 \cdot (x - 4) = 0$$

$$0,1x^3 = 0$$

$$x_1 = 0$$

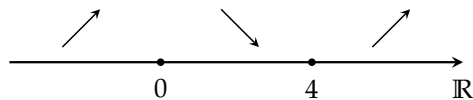
$$x - 4 = 0$$

$$x_2 = 4$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei  $f'(x)$

$$\left. \begin{array}{l} f'(-1) = 0,1 \cdot (-1)^4 - 0,4 \cdot (-1)^3 = 0,5 > 0 \\ f'(1) = 0,1 \cdot 1^4 - 0,4 \cdot 1^3 = -0,3 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{lokaler Hochpunkt bei } x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1) = -0,3 < 0 \\ f'(5) = 0,1 \cdot 5^4 - 0,4 \cdot 5^3 = 12,5 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{lokaler Tiefpunkt bei } x = 4$$



$$f(0) = 0,02 \cdot 0^5 - 0,1 \cdot 0^4 = 0$$

$$f(4) = 0,02 \cdot 4^5 - 0,1 \cdot 4^4 = -5,12$$

Der Graph von  $f$  besitzt an der Stelle  $x = 0$  einen lokalen Hochpunkt mit Koordinaten  $H(0 | 0)$  und an der Stelle  $x = 4$  einen lokalen Tiefpunkt mit Koordinaten  $T(4 | -5,12)$ .

Es existiert weder ein globaler Hochpunkt noch ein globaler Tiefpunkt.

f)

$$f(x) = x^6 - \frac{6}{5}x^5 - 2x^4 + 6$$

$$f'(x) = 6x^5 - 6x^4 - 8x^3$$

Notwendige Bedingung:  $f'(x) = 0$

$$6x^5 - 6x^4 - 8x^3 = 0$$

$$2x^3 \cdot (3x^2 - 3x - 4) = 0$$

$$2x^3 = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$3x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - \frac{4}{3} = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{3}}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{19}{12}}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{19}{12}} \approx 1,76$$

$$x_3 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{19}{12}} \approx -0,76$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei  $f'(x)$

$$\left. \begin{aligned} f'(-1) &= 6 \cdot (-1)^5 - 6 \cdot (-1)^4 - 8 \cdot (-1)^3 \\ &= -4 < 0 \\ f'\left(-\frac{1}{2}\right) &= 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{7}{16} > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{lokaler} \\ \text{Tiefpunkt} \\ \text{bei } x = -0,76 \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned}
 f' \left( -\frac{1}{2} \right) &= \frac{7}{16} > 0 \\
 f' \left( \frac{1}{2} \right) &= 6 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^5 - 6 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^4 - 8 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^3 \\
 &= -\frac{19}{16} < 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{lokaler Hochpunkt bei } x = 0$$
  

$$\left. \begin{aligned}
 f' \left( \frac{1}{2} \right) &= -\frac{19}{16} < 0 \\
 f'(2) &= 6 \cdot 2^5 - 6 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 = 32 > 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{lokaler Tiefpunkt bei } x = 1,76$$

$$f(-0,76) = (-0,76)^6 - \frac{6}{5} \cdot (-0,76)^5 - 2 \cdot (-0,76)^4 + 6 \approx 5,83$$

$$f(0) = 0^6 - \frac{6}{5} \cdot 0^5 - 2 \cdot 0^4 + 6 = 6$$

$$f(1,76) = (1,76)^6 - \frac{6}{5} \cdot (1,76)^5 - 2 \cdot (1,76)^4 + 6 \approx -3,73$$

Der Graph von  $f$  besitzt an der Stelle  $x = -0,76$  einen lokalen Tiefpunkt mit den Koordinaten  $T_1(-0,76 \mid 5,83)$ , an der Stelle  $x = 0$  einen lokalen Hochpunkt mit den Koordinaten  $H(0 \mid 6)$  und an der Stelle  $x = 1,76$  einen lokalen Tiefpunkt mit den Koordinaten  $T_2(1,76 \mid -3,73)$ .

Der Punkt  $T_2$  ist ein globaler Tiefpunkt. Es existiert kein globaler Hochpunkt.

g)

$$f(x) = 6 - 2x^3 + 4x^5 - x^4 = 4x^5 - x^4 - 2x^3 + 6$$

$$f'(x) = 20x^4 - 4x^3 - 6x^2$$



Notwendige Bedingung:  $f'(x) = 0$

$$20x^4 - 4x^3 - 6x^2 = 0$$

$$2x^2 \cdot (10x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$2x^2 = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$10x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{3}{10} = 0$$

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{1}{10} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{3}{10}} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{31}}{10} \end{aligned}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{31}}{10} \approx -0,46$$

$$x_3 = \frac{1 + \sqrt{31}}{10} \approx 0,66$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei  $f'(x)$

$$\left. \begin{aligned} f'(-1) &= 20 \cdot (-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 \\ &= 18 > 0 \\ f'\left(-\frac{1}{5}\right) &= 20 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^4 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^3 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \\ &= -\frac{22}{125} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{lokaler Hochpunkt bei } x = -0,46$$

$$\left. \begin{aligned}
 f' \left( -\frac{1}{5} \right) &= -\frac{22}{125} < 0 \\
 f' \left( \frac{1}{2} \right) &= 20 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^4 - 4 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^3 - 6 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^2 \\
 &= -\frac{3}{4} < 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Sattelpunkt bei } x = 0$$
  

$$\left. \begin{aligned}
 f' \left( \frac{1}{2} \right) &= -\frac{3}{4} < 0 \\
 f'(1) &= 20 \cdot 1^4 - 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 = 10 > 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{lokaler} \\ \text{Tiefpunkt} \\ \text{bei } x = 0,66 \end{array}$$

$$f(-0,46) = 4 \cdot (-0,46)^5 - (-0,46)^4 - 2 \cdot (-0,46)^3 + 6 \approx 6,07$$

$$f(0) = 4 \cdot 0^5 - 0^4 - 2 \cdot 0^3 + 6 = 6$$

$$f(0,66) = 4 \cdot (0,66)^5 - (0,66)^4 - 2 \cdot (0,66)^3 + 6 \approx 5,74$$

Der Graph von  $f$  besitzt an der Stelle  $x = -0,46$  einen lokalen Hochpunkt mit den Koordinaten  $H(-0,46 \mid 6,07)$ , an der Stelle  $x = 0$  einen Sattelpunkt mit den Koordinaten  $S(0 \mid 6)$  und an der Stelle  $x = 0,66$  einen lokalen Tiefpunkt mit den Koordinaten  $T(0,66 \mid 5,74)$ .

Es existiert weder ein globaler Hochpunkt noch ein globaler Tiefpunkt.

**h)**

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -8 - x \cdot (3 - x)^2 + 2x \\
 &= -8 - x \cdot (9 - 6x + x^2) + 2x \\
 &= -8 - 9x + 6x^2 - x^3 + 2x \\
 &= -x^3 + 6x^2 - 7x - 8 \\
 f'(x) &= -3x^2 + 12x - 7
 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:  $f'(x) = 0$

$$-3x^2 + 12x - 7 = 0$$

$$x^2 - 4x + \frac{7}{3} = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \frac{7}{3}}$$

$$= 2 \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$$

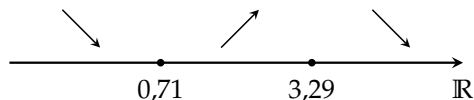
$$x_2 = 2 + \sqrt{\frac{5}{3}} \approx 3,29$$

$$x_3 = 2 - \sqrt{\frac{5}{3}} \approx 0,71$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei  $f'(x)$

$$\left. \begin{aligned}
 f'(0) &= -3 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 - 7 = -7 < 0 \\
 f'(1) &= -3 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 7 = 2 > 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{lokaler Tiefpunkt bei } x = 0,71$$

$$\left. \begin{aligned}
 f'(1) &= 2 > 0 \\
 f'(4) &= -3 \cdot 4^2 + 12 \cdot 4 - 7 = -7 < 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{lokaler Hochpunkt bei } x = 3,29$$



$$f(0,71) = -(0,71)^3 + 6 \cdot (0,71)^2 - 7 \cdot (0,71) - 8 \approx -10,3$$

$$f(3,29) = -(3,29)^3 + 6 \cdot (3,29)^2 - 7 \cdot (3,29) - 8 \approx -1,7$$

Der Graph von  $f$  besitzt an der Stelle  $x = 0$  einen lokalen Tiefpunkt mit den Koordinaten  $T(0,71 \mid -10,3)$  und an der Stelle  $x = 3,29$  einen lokalen Hochpunkt mit den Koordinaten  $H(3,29 \mid -1,7)$ .

Es existiert weder ein globaler Hochpunkt noch ein globaler Tiefpunkt.

i)

$$\begin{aligned} f(x) &= (2-x)^3 + 1 \\ &= (2-x)^2(2-x) + 1 \\ &= (4-4x+x^2)(2-x) + 1 \\ &= 8-4x-8x+4x^2+2x^2-x^3 \\ &= -x^3+6x^2-12x+8 \\ f'(x) &= -3x^2+12x-12 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:  $f'(x) = 0$

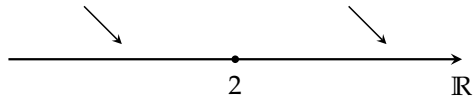
$$-3x^2 + 12x - 12 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei  $f'(x)$

$$\left. \begin{aligned} f'(1) &= -3 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 12 = -3 < 0 \\ f'(3) &= -3 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 12 = -3 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Sattelpunkt bei } x = 2$$



$$f(2) = -(2)^3 + 6 \cdot (2)^2 - 12 \cdot (2) + 8 = 0$$

Der Graph von  $f$  besitzt an der Stelle  $x = 2$  einen Sattelpunkt mit den Koordinaten  $S(2 | 0)$ .

Es existiert weder ein globaler Hochpunkt noch ein globaler Tiefpunkt.

