

Aufgabe 11

a) Wahr. Ist der Graph von f' eine quadratische Funktion mit zwei Nullstellen, so ist die notwendige Bedingung ($f'(x) = 0$) an zwei Stellen erfüllt. Die hinreichende Bedingung für einen Hochpunkt (ein Vorzeichenwechsel von Plus zu Minus), sowie die hinreichende Bedingung für einen Tiefpunkt (ein Vorzeichenwechsel von Minus zu Plus) ist ebenfalls erfüllt.

b) Falsch. An einer Stelle mit einer waagerechten Tangente (einer Nullstelle der Ableitungsfunktion) kann auch ein Sattelpunkt liegen.

c) Falsch. Beide Hoch- bzw. Tiefpunkte können über der x-Achse liegen.

d) Falsch. Beispielsweise besitzt die Funktion

$$f(x) = -x^4 + x^2$$

zwei Hochpunkte (bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$) und einen Tiefpunkt (bei $x_3 = 0$). Die zweite Ableitung ($f''(x)$, die Ableitung der Ableitung) ist aber eine nach unten geöffnete Parabel:

$$f'(x) = -4x^3 + 2x$$

$$f''(x) = -12x^2 + 2$$

e) Wahr. Die erste Ableitung einer Funktion 6. Grades (der höchste Exponent von x ist 6) ist eine Funktion 5. Grades:

$$f(x) = x^6 + \dots$$

$$f'(x) = 6x^5 + \dots$$

Eine Funktion 5. Grades besitzt höchstens 5 Nullstellen, das heißt, die notwendige Bedingung ($f'(x) = 0$) kann an höchstens 5 Stellen erfüllt sein.

f) Falsch. Begründung wie in (b): An einer Stelle mit einer waagerechten Tangente (einer Nullstelle der Ableitungsfunktion) kann auch ein Sattelpunkt liegen.