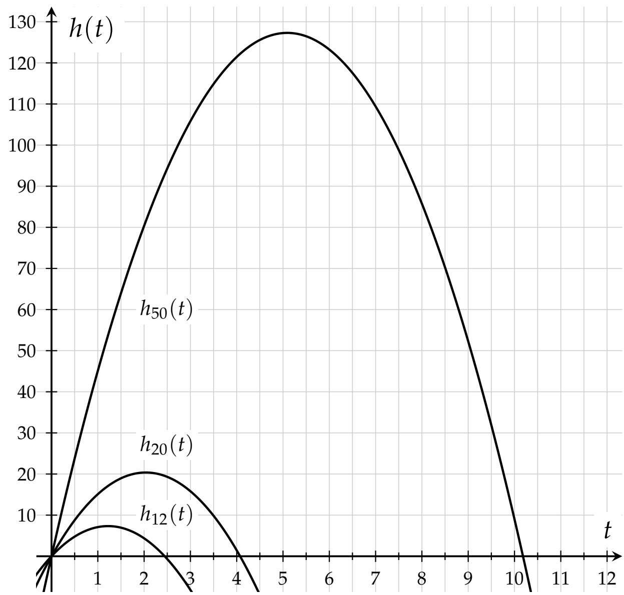
Aufgabe 13

$$h(t) = v_0 \cdot t - 0{,}5g \cdot t^2$$

a)

$$h_{12}(t) = 12 \cdot t - 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot t^2 = 12t - 4{,}91t^2$$
$$h_{20}(t) = 20 \cdot t - 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot t^2 = 20t - 4{,}91t^2$$
$$h_{50}(t) = 50 \cdot t - 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot t^2 = 50t - 4{,}91t^2$$



Alle drei Graphen sind Parabeln, sind nach unten geöffnet und besitzen eine gemeinsame Nullstelle bei $t = 0$. Die zweite Nullstelle, sowie die Koordinaten vom Scheitelpunkt (dem höchsten Punkt) der jeweiligen Parabel hängen von der Abwurfgeschwindigkeit v_0 ab. Je höher ist v_0, desto höher und länger fliegt der Gegenstand.

b) Der (globale!) Hochpunkt einer nach unten geöffneten Parabel ist der Scheitelpunkt. Mit quadratischer Ergänzung erhalten wir:

$$\begin{aligned} h_{12}(t) &= 12t - 4{,}91t^2 \\ &= -4{,}91t^2 + 12t \\ &= -4{,}91 \cdot (t^2 - 2{,}44t) \\ &= -4{,}91 \cdot (t^2 - 2{,}44t + 1{,}22^2 - 1{,}22^2) \\ &= -4{,}91 \cdot \left((t - 1{,}22)^2 - 1{,}49\right) \\ &= -4{,}91 \cdot (t - 1{,}22)^2 + 7{,}32 \end{aligned}$$

Die maximale Höhe beträgt für $v_0 = 12\ \frac{m}{s}$ also etwa 7,32 m.

$$\begin{aligned} h_{20}(t) &= 20t - 4{,}91t^2 \\ &= -4{,}91t^2 + 20t \\ &= -4{,}91 \cdot (t^2 - 4{,}07t) \\ &= -4{,}91 \cdot (t^2 - 4{,}07t + 2{,}04^2 - 2{,}04^2) \\ &= -4{,}91 \cdot \left((t - 2{,}04)^2 - 2{,}04^2\right) \\ &= -4{,}91 \cdot \left((t - 2{,}04)^2 - 4{,}16\right) \\ &= -4{,}91 \cdot (t - 2{,}04)^2 + 20{,}43 \end{aligned}$$

Die maximale Höhe beträgt für $v_0 = 20\ \frac{m}{s}$ also etwa 20,43 m.

$$\begin{aligned} h_{50}(t) &= 50t - 4{,}91t^2 \\ &= -4{,}91t^2 + 50t \\ &= -4{,}91 \cdot (t^2 - 10{,}18t) \\ &= -4{,}91 \cdot (t^2 - 10{,}18t + 5{,}09^2 - 5{,}09^2) \\ &= -4{,}91 \cdot \left((t - 5{,}09)^2 - 25{,}91\right) \\ &= -4{,}91 \cdot (t - 5{,}09)^2 + 127{,}22 \end{aligned}$$

Die maximale Höhe beträgt für $v_0 = 50\ \frac{m}{s}$ etwa 127,22 m.

c) Die $h'(t)$ gibt die momentane Änderungsrate der Höhe des fliegenden Gegenstandes und somit seine momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t an.

d)

$$h_{20}(t) = 20t - 4{,}91t^2$$

$$h_{20}(0) = 20 \cdot 0 - 4{,}91 \cdot 0^2 = 0$$

Der Gegenstand wurde aus der Höhe 0 m abgeworfen.

$$\begin{aligned} h_{20}(t) &= 0 \\ 20t - 4{,}91t^2 &= 0 \\ t \cdot (20 - 1{,}91t) &= 0 \\ t_1 &= 0 \\ 20 - 4{,}91t &= 0 \\ 20 &= 4{,}91t \\ t_2 &\approx 4{,}07 \end{aligned}$$

Es dauert 4,07 s, bis der Gegenstand wieder die Höhe 0 m, aus der er abgeworfen wurde, erreicht.

$$\begin{aligned} h'_{20}(t) &= 20 - 9{,}82t \\ h'_{20}(4{,}07) &= 20 - 9{,}82 \cdot 4{,}07 \approx -19{,}97 \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit vom fliegenden Gegenstand beträgt zum Zeitpunkt $t = 4{,}07$ etwa 19,97 $\frac{m}{s}$.

Das negative Vorzeichen lässt sich als die entgegengesetzte Richtung der Geschwindigkeit (der Gegenstand fliegt nach unten, nicht nach oben) interpretieren.