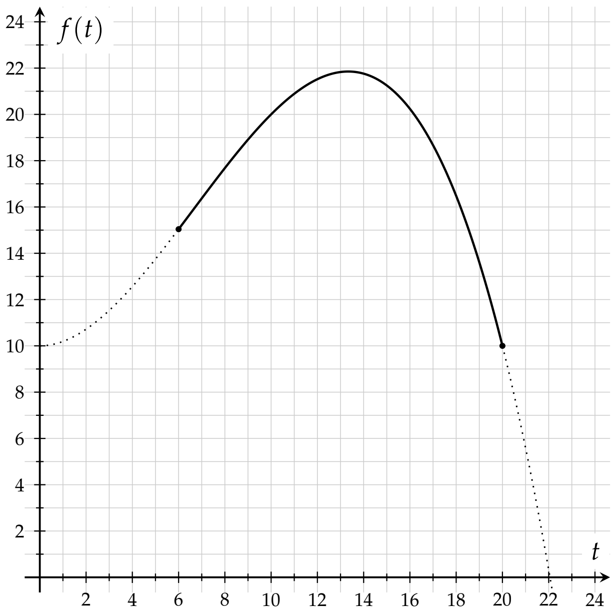
Aufgabe 4

$$f(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}2x^2 + 10 \qquad x \in [6;20]$$



a)

$$f(10) = -0{,}01 \cdot 10^3 + 0{,}2 \cdot 10^2 + 10 = 20$$
$$f(20) = -0{,}01 \cdot 20^3 + 0{,}2 \cdot 20^2 + 10 = 10$$

Um 10 Uhr beträgt die Temperatur $20°C$ und um 20 Uhr beträgt sie $10°C$.

b)

$$\begin{aligned} f(6) &= -0{,}01 \cdot 6^3 + 0{,}2 \cdot 6^2 + 10 = 15{,}04 \\ f(10) &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{f(10) - f(6)}{10 - 6} \\ &= \frac{20 - 15{,}04}{4} \\ &= 1{,}24 \end{aligned}$$

Die durchschnittliche Temperaturänderung in den ersten vier Stunden beträgt 1,24 $\frac{°C}{h}$.

c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -0{,}03x^2 + 0{,}4x \\ f'(10) &= -0{,}03 \cdot 10^2 + 0{,}4 \cdot 10 = 1 \end{aligned}$$

Die momentane Temperaturänderung um 10 Uhr beträgt 1 $\frac{°C}{h}$.

d) Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} -0{,}03x^2 + 0{,}4x &= 0 \\ x(-0{,}03x + 0{,}4) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ -0{,}03x + 0{,}4 &= 0 \\ -0{,}03x &= -0{,}4 \\ x_2 &= 13\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Die Stelle $x_1 = 0$ liegt außerhalb des Definitionsbereichs ($[6; 20]$).

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$\left.\begin{aligned} f'(10) &= 1 > 0 \\ f'(14) &= -0{,}03 \cdot 14^2 + 0{,}4 \cdot 14 = -0{,}28 < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{lokaler}\\ \text{Hochpunkt}\\ \text{bei } x = 13\frac{1}{3}\end{array}$$

Randvergleich:

$$\begin{aligned} f\left(13\frac{1}{3}\right) &= -0{,}01 \cdot \left(13\frac{1}{3}\right)^3 + 0{,}2 \cdot \left(13\frac{1}{3}\right)^2 + 10 \approx 21{,}85 \\ f(6) &= -0{,}01 \cdot 6^3 + 0{,}2 \cdot 6^2 + 10 \approx 15{,}04 \\ f(20) &= 10 \end{aligned}$$

Die Funktion liefert die höchste Temperatur zur Uhrzeit $x = 13\frac{1}{3}$.