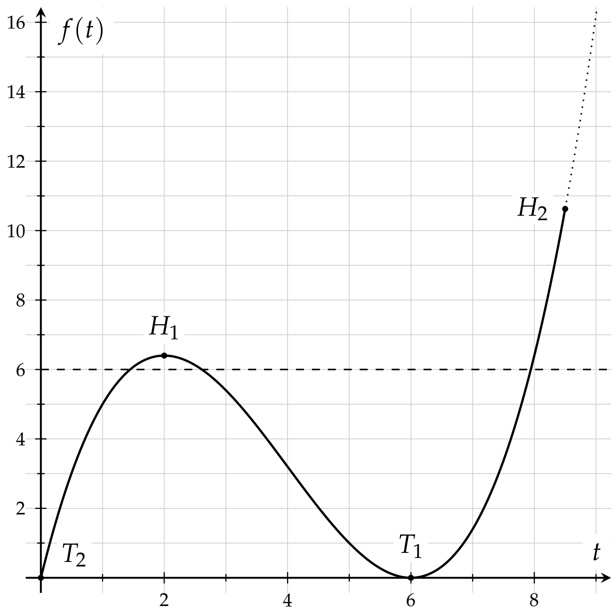
Aufgabe 7

$$f(t) = 0{,}2t^3 - 2{,}4t^2 + 7{,}2t \qquad t \in [0; 8{,}5]$$

a)



b) Der Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = 0{,}2 \cdot 0^3 - 2{,}4 \cdot 0^2 + 7{,}2 \cdot 0 = 0$$

$$S_y(0|0)$$

Der y-Achsenabschnitt gibt die Durchflussgeschwindigkeit zu Beginn der Beobachtung ($t = 0$) an.

Die Schnittpunkte mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \\ 0{,}2t^3 - 2{,}4t^2 + 7{,}2t &= 0 \\ t_1 &= 0 \\ t_2 &= 6 \end{aligned}$$

$$N_1(0|0), \quad N_2(6|0)$$

Die Nullstellen von $f(t)$ sind die Zeitpunkte, zu denen die Durchflussgeschwindigkeit gleich Null ist (der Fluss ist beispielsweise ausgetrocknet).

Die lokalen Extrema entsprechen der jeweils höchster bzw. tiefster Durchflussgeschwindigkeit (lokal!).

NB: $f'(t) = 0$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 0{,}6t^2 - 4{,}8t + 7{,}2 \\ f'(t) &= 0 \\ 0{,}6t^2 - 4{,}8t + 7{,}2 &= 0 \\ t_1 &= 2 \\ t_2 &= 6 \end{aligned}$$

HB: VZW bei $f'(t)$.

$$\begin{aligned} &f(2) = 0{,}2 \cdot 2^3 - 2{,}4 \cdot 2^2 + 7{,}2 \cdot 2 = 6{,}4 \\ &f(6) = 0 \end{aligned}$$

$$T_1(6|0), \quad H_1(2|6{,}4)$$

Das zweite (!) globale Minimum liegt an der unteren Intervallgrenze ($t = 0$) und das globale Maximum an der oberen Intervallgrenze

($t = 8{,}5$), wie der Randvergleich zeigt:

$$f(0) = 0$$
$$f(8{,}5) = 0{,}2 \cdot 8{,}5^3 - 2{,}4 \cdot 8{,}5^2 + 7{,}2 \cdot 8{,}5 = 10{,}625$$

$$T_2(0|0), \quad H_2(8{,}5|10{,}625)$$

c) Nach (b) liegt das globale Maximum an der Stelle $t = 8{,}5$ und die höchste Durchflussgeschwindigkeit beträgt deswegen

$$f(8{,}5) = 10{,}625 \cdot 10^6 \ \frac{m^3}{\text{Monat}}.$$

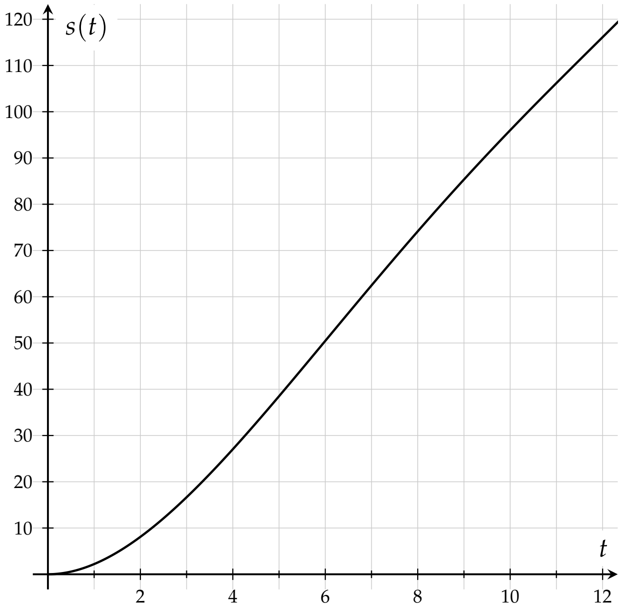
d)

$$\begin{aligned} f(t) &= 6 \\ 0{,}2t^3 - 2{,}4t^2 + 7{,}2t &= 6 \\ t_1 &\approx 1{,}45 \\ t_2 &\approx 2{,}61 \\ t_3 &\approx 7{,}94 \end{aligned}$$

Zu den Zeitpunkten $t_1 \approx 1{,}45$, $t_2 \approx 2{,}61$ und $t_3 \approx 7{,}94$ beträgt die Durchflussgeschwindigkeit $6 \cdot 10^6 \ \frac{m^3}{\text{Monat}}$.

Aufgabe 8

$$s(t) = 0{,}0056t^4 - 0{,}2t^3 + 2{,}4t^2$$



a)

$$s(5) = 0{,}0056 \cdot 5^4 - 0{,}2 \cdot 5^3 + 2{,}4 \cdot 5^2 = 38{,}5$$

In den ersten 5 Sekunden ist der Läufer 38,5 m gelaufen.

b)

$$s(0) = 0{,}0056 \cdot 0^4 - 0{,}2 \cdot 0^3 + 2{,}4 \cdot 0^2 = 0$$
$$s(5) = 38{,}5$$
$$m_s = \frac{s(5) - s(0)}{5 - 0} = \frac{38{,}5 - 0}{5 - 0} = 7{,}7$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Läufers betrug in den ersten 5 Sekunden 7,7 $\frac{m}{s}$.

c) Mit der „Geschwindigkeit“ ist die momentane Geschwindigkeit $v(t)$ gemeint:

$$v(t) = s'(t)$$

$$\begin{aligned} s'(t) &= 0{,}0224t^3 - 0{,}6t^2 + 4{,}8t \\ s'(0{,}5) &= 0{,}0224 \cdot 0{,}5^3 - 0{,}6 \cdot 0{,}5^2 + 4{,}8 \cdot 0{,}5 \approx 2{,}25 \end{aligned}$$

Die (momentane) Geschwindigkeit des Läufers betrug nach 0,5 Sekunden 2,25 $\frac{m}{s}$.

d)

$$s(10) = 0{,}0056 \cdot 10^4 - 0{,}2 \cdot 10^3 + 2{,}4 \cdot 10^2 = 96$$

Der Läufer hat zum Zeitpunkt $t = 10$ also nur 96 von 100 m geschafft und hat somit die Ziellinie noch nicht erreicht.

$$\begin{aligned} s(t) &= 100 \\ 0{,}0056t^4 - 0{,}2t^3 + 2{,}4t^2 &= 100 \\ t_1 &\approx -5{,}26 \\ t_2 &\approx 10{,}39 \end{aligned}$$

Der Zeit $t_1 \approx -5{,}26$ liegt in der Vergangenheit (vor dem Startschuss) und passt somit nicht zum Kontext der Aufgabe. Der Läufer benötigt also 10,39 Sekunden für seinen 100 m-Lauf.