

Aufgabe 12

- a) Wahr. Jede gerade Zahl lässt sich durch 2 teilen und hat deswegen neben 1 und sich selbst einen weiteren gemeinsamen Teiler mit jeder anderen geraden Zahl. Der ggT von zwei geraden Zahlen ist dadurch nie gleich 1 und deswegen sind sie nie teilerfremd.
- b) Falsch. Jede Primzahl kommt in der Primfaktorzerlegung von unendlich vielen weiteren Zahlen vor und so kann sie nicht zu jeder anderen Zahl teilerfremd sein (Ausnahme: Primzahlen).
- c) Falsch. Gegenbeispiel: Die Zahlen 2 und 11 besitzen die gleiche Quersumme 2 sind aber als Primzahlen teilerfremd.
- d) Wahr. Jede Primzahl besitzt nur die 1 und sich selbst als Teiler und deswegen sind verschiedene Primzahlen immer teilerfremd.
- e) Falsch. Gegenbeispiel: Der ggT von 2 und 4 ist 2 und somit nicht kleiner als die kleinere Zahl.
- f) Wahr. Zwei direkt aufeinanderfolgende Zahlen¹ unterscheiden sich um 1 und sind deswegen teilerfremd.

Sei t ein beliebiger Teiler der ersten Zahl (außer 1!). Teilen wir die zweite Zahl durch t , so erhalten wir den Rest 1, weil die zweite Zahl um 1 größer ist, als die erste. Also ist t kein Teiler der zweiten Zahl und deswegen müssen beide Zahlen teilerfremd sein, weil unsere Aussage (t teilt die zweite Zahl nicht) für jeden beliebigen Teiler der ersten Zahl gilt!

Das Lösungswort lautet: *EUKLID*

¹In dieser Aufgabe geht es ausschließlich um natürliche Zahlen 0, 1, 2, 3, ...!

Aufgabe 16

a) Zwischen 4 und 8 liegen die Primzahlen 5 und 7.

$10 : 2 = 5$. Zwischen 5 und 10 liegt die Primzahl 7.

$7 \cdot 2 = 14$. Zwischen 7 und 14 liegen die Primzahlen 9, 11 und 13.

Zahl	2	3	4	5	7
Primzahl	3	5	5	7	9
Doppeltes	4	6	8	10	14

$12 \cdot 2 = 24$. Zwischen 12 und 24 liegen die Primzahlen 13, 17, 19 und 23.

$40 : 2 = 20$. Zwischen 20 und 40 liegen die Primzahlen 23, 29, 31 und 37.

$100 \cdot 2 = 200$. Zwischen 100 und 200 liegen die Primzahlen 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197 und 199.

$400 : 2 = 200$. Zwischen 200 und 400 liegen die Primzahlen 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383 und 389.

Zahl	12	20	100	200
Primzahl	13	23	101	211
Doppeltes	24	40	200	400

b) Es gibt unendlich viele Primzahlen und deswegen gibt es auch mehr als eine Primzahl, die größer als eine Milliarde ist, wie zum Beispiel

1.000.000.007

Alternative: Wie von Dirichlet bewiesen (siehe (a)), gibt es zwischen 1.000.000.000 und dem Doppelten (2.000.000.000) mindestens eine Primzahl, es gibt also Primzahlen größer als 1.000.000.000!