Aufgabe 5

a)

$$\frac{2}{x}$$

Die einzige „Problemstelle“ hier ist x im Nenner. Der Nenner wird dann zu Null, wenn $x = 0$ ist, die Definitionsmenge lautet demnach

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

also „alle reellen Zahlen außer Null“.

b)

$$\frac{5}{x - 10}$$

Die einzige „Problemstelle“ hier ist $x - 10$ im Nenner. Der Nenner wird dann zu Null, wenn $x - 10 = 0$ ist, also für

$$\begin{aligned} x - 10 &= 0 && \mid +10 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

die Definitionsmenge lautet demnach

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{10\}$$

also „alle reellen Zahlen außer 10“.

c)

$$\frac{4}{2x - 6}$$

Die einzige „Problemstelle“ hier ist $2x - 6$ im Nenner. Der Nenner wird dann zu Null, wenn $2x - 6 = 0$ ist, also für

$$\begin{aligned} 2x - 6 &= 0 && \mid +6 \\ 2x &= 6 && \mid :2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

die Definitionsmenge lautet demnach

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{3\}$$

also „alle reellen Zahlen außer 3“.

d)

$$\frac{x}{x+5}$$

Die einzige „Problemstelle“ hier ist $x+5$ im Nenner. Der Nenner wird dann zu Null, wenn $x+5=0$ ist, also für

$$\begin{aligned} x+5 &= 0 \qquad && | -5 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

die Definitionsmenge lautet demnach

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{-5\}$$

also „alle reellen Zahlen außer -5“.

Es ist völlig in Ordnung, wenn die Null im Zähler vorkommt, denn

$$\frac{0}{0+5} = \frac{0}{5} = 0$$

während

$$\frac{5}{5-5} = \frac{5}{0}$$

nicht definiert ist!

e) Druckfehler $\big($gleich wie (a)$\big)$!

$$\frac{2}{x}$$

Die einzige „Problemstelle“ hier ist x im Nenner. Der Nenner wird dann zu Null, wenn $x=0$ ist, die Definitionsmenge lautet demnach

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

also „alle reellen Zahlen außer Null“.

f)

$$\frac{4x-8}{3x+9}$$

Die einzige „Problemstelle“ hier ist $3x + 9$ im Nenner. Der Nenner wird dann zu Null, wenn $3x + 9 = 0$ ist, also für

$$\begin{aligned} 3x + 9 &= 0 && \mid -9 \\ 3x &= -9 && \mid :3 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

die Definitionsmenge lautet demnach

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$$

also „alle reellen Zahlen außer -3“.

Es ist völlig in Ordnung, wenn die Null im Zähler vorkommt, denn

$$\frac{4\cdot 2-8}{3\cdot 2+9} = \frac{0}{15} = 0$$

während

$$\frac{4\cdot(-3)-8}{3\cdot(-3)+9} = \frac{-20}{0}$$

nicht definiert ist!

g)

$$\frac{1}{x\cdot(x-2)}$$

Die einzige „Problemstelle“ hier ist $x \cdot (x-2)$ im Nenner. Der Nenner wird dann zu Null, wenn $x \cdot (x-2) = 0$ ist.

An dieser Stelle sollen wir auf keinen Fall die Klammern auflösen (sonst ist die Gleichung mit unseren Mitteln nicht lösbar)! Stattdessen überlegen wir, was wir vor uns haben:

$$x\cdot(x-2) = 0$$

ist ein Produkt. Ein Produkt aus zwei Termen x und $x-2$, welches gleich Null ist. Ein Produkt aus zwei Zahlen ist genau dann Null, falls mindestens eine der Zahlen gleich Null ist („Produkt gleich Null“-Regel):

$$0\cdot ? = 0$$
$$? \cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot 0 = 0$$

Also müssen wir sowohl $x = 0$ als auch $x = 2$ ausschließen. Die Definitionsmenge lautet somit

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{0;2\}$$

also „alle reellen Zahlen außer 0 und 2“.