Aufgabe 23

a)

$$\frac{3}{x-4} = \frac{18}{x+1}$$

x darf weder 4, noch -1 sein (sonst teilen wir durch Null):

$$x \neq 4, \qquad x \neq -1$$

Oder „der Definitionsbereich enthält alle Zahlen außer 4 und -1":

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{4; -1\}$$

Zunächst eliminieren wir beide Nenner mit x:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x-4} &= \frac{18}{x+1} && | \cdot (x-4) \\
\frac{3}{\cancel{x-4}} \cdot \cancel{(x-4)} &= \frac{18}{x+1} \cdot (x-4) \\
3 &= \frac{18 \cdot (x-4)}{x+1} && | \cdot (x+1) \\
3 \cdot (x+1) &= \frac{18 \cdot (x-4) \cdot \cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} \\
3 \cdot (x+1) &= 18 \cdot (x-4) \\
3x + 3 &= 18x - 72 && | -3x \\
3 &= 15x - 72 && | +72 \\
75 &= 15x && | : 15 \\
5 &= x
\end{aligned}$$

$x = 5$ ist weder -1 noch 4, also ist es eine Lösung der Gleichung.

b)

$$\frac{1}{x} = \frac{5}{x+1}$$

x darf weder 0, noch -1 sein (sonst teilen wir durch Null):

$$x \neq 0, \qquad x \neq -1$$

Oder „der Definitionsbereich enthält alle Zahlen außer 0 und -1“:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$$

Zunächst eliminieren wir beide Nenner mit x:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{5}{x+1} && | \cdot x \\
\frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} &= \frac{5}{x+1} \cdot x \\
1 &= \frac{5x}{x+1} && | \cdot (x+1) \\
1 \cdot (x+1) &= \frac{5x}{\cancel{x+1}} \cdot \cancel{(x+1)} \\
x+1 &= 5x && | - x \\
1 &= 4x && | : 4 \\
\frac{1}{4} &= x
\end{aligned}$$

$x = \frac{1}{4}$ ist weder 0 noch -1, also ist es eine Lösung der Gleichung.

c)

$$\frac{5}{x+8} = \frac{1}{4-x}$$

x darf weder -8, noch 4 sein (sonst teilen wir durch Null):

$$x \neq -8, \qquad x \neq 4$$

Oder „der Definitionsbereich enthält alle Zahlen außer -8 und 4“:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-8; 4\}$$

Zunächst eliminieren wir beide Nenner mit x:

$$\begin{aligned}
\frac{5}{x+8} &= \frac{1}{4-x} && \mid \cdot (x+8) \\
\frac{5}{\cancel{x+8}} \cdot \cancel{(x+8)} &= \frac{1}{4-x} \cdot (x+8) \\
5 &= \frac{x+8}{4-x} && \mid \cdot (4-x) \\
5 \cdot (4-x) &= \frac{x+8}{\cancel{4-x}} \cdot \cancel{(4-x)} \\
20 - 5x &= x + 8 && \mid +5x \\
20 &= 6x + 8 && \mid -8 \\
12 &= 6x && \mid : 6 \\
2 &= x
\end{aligned}$$

$x = 2$ ist weder -8 noch 4, also ist es eine Lösung der Gleichung.

d)

$$\frac{x+2}{x-2} = 0$$

x darf nicht 2 sein (sonst teilen wir durch Null):

$$x \neq 2$$

Oder „der Definitionsbereich enthält alle Zahlen außer 2“:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$$

Zunächst eliminieren wir den Nenner mit x:

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{x-2} &= 0 && \mid \cdot (x-2) \\
\frac{x+2}{\cancel{x-2}} \cdot \cancel{(x-2)} &= 0 \cdot (x-2) && \\
x+2 &= 0 && \mid -2 \\
x &= -2 &&
\end{aligned}$$

$x = -2$ ist keine 2, also ist es eine Lösung der Gleichung.

e)

$$\frac{1}{6} = \frac{x-4}{2x}$$

x darf nicht 0 sein (sonst teilen wir durch Null):

$$x \neq 0$$

Oder „der Definitionsbereich enthält alle Zahlen außer 0“:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

Zunächst eliminieren wir den Nenner mit x:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} &= \frac{x-4}{2x} && \mid \cdot 2x \\
\frac{1}{6} \cdot 2x &= \frac{x-4}{\cancel{2x}} \cdot \cancel{2x} && \\
\frac{2x}{6} &= x-4 && \mid \cdot 6 \\
2x &= 6x - 24 && \mid -2x \\
0 &= 4x - 24 && \mid +24 \\
24 &= 4x && \mid : 4 \\
6 &= x &&
\end{aligned}$$

$x = 6$ ist keine 0, also ist es eine Lösung der Gleichung.

f)

$$\frac{x+1}{x} = \frac{4}{3x}$$

x darf nicht 0 sein (sonst teilen wir durch Null):

$$x \neq 0$$

Oder „der Definitionsbereich enthält alle Zahlen außer 0“:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Zunächst eliminieren wir beide Nenner mit x:

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x} &= \frac{4}{3x} && | \cdot x \\
\frac{x+1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} &= \frac{4}{3x} \cdot x \\
x+1 &= \frac{4x}{3x} && | \cdot 3x \\
(x+1) \cdot 3x &= \frac{4x}{\cancel{3x}} \cdot \cancel{3x} \\
3x^2 + 3x &= 4x && | -4x \\
3x^2 - x &= 0
\end{aligned}$$

Das Ausklammern hilft uns weiter:

$$x \cdot (3x-1) = 0$$

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist („Produkt gleich Null“-Regel), also

$$x_1 = 0$$

$$\begin{aligned}
3x - 1 &= 0 && | +1 \\
3x &= 1 && | :3 \\
x_2 &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$x_2 = \frac{1}{3}$ ist keine 0, also ist es eine Lösung der Gleichung. Die Lösung $x_1 = 0$ müssen wir aber verwerfen!

g)

$$\frac{3}{2x} + \frac{3}{x} = \frac{1}{2}$$

x darf nicht 0 sein (sonst teilen wir durch Null):

$$x \neq 0$$

Oder „der Definitionsbereich enthält alle Zahlen außer 0“:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

Zunächst eliminieren wir beide Nenner mit x:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2x} + \frac{3}{x} &= \frac{1}{2} && | \cdot (2x) \\
\frac{3}{\cancel{2x}} \cdot \cancel{(2x)} + \frac{3}{x} \cdot (2x) &= \frac{1}{2} \cdot (2x) \\
3 + \frac{6x}{x} &= x && | \cdot x \\
3x + \frac{6x}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} &= x \cdot x \\
3x + 6x &= x^2 \\
9x &= x^2 && | - x^2 \\
9x - x^2 &= 0
\end{aligned}$$

Das Ausklammern hilft uns weiter:

$$x \cdot (9 - x) = 0$$

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist („Produkt gleich Null“-Regel), also

$$x_1 = 0$$

$$\begin{aligned}
9 - x &= 0 && | + x \\
9 &= x_2
\end{aligned}$$

$x_2 = 9$ ist keine 0, also ist es eine Lösung der Gleichung. Die Lösung $x_1 = 0$ müssen wir aber verwerfen!

h)

$$\frac{1}{x-2} = \frac{4}{(x-2)\cdot(x+2)}$$

x darf weder 2 noch -2 sein (sonst teilen wir durch Null):

$$x \neq 2, \qquad x \neq -2$$

Oder „der Definitionsbereich enthält alle Zahlen außer 0“:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{2; -2\}$$

Zunächst eliminieren wir beide Nenner mit x:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-2} &= \frac{4}{(x-2)\cdot(x+2)} && \mid \cdot (x-2) \\
\frac{1}{\cancel{x-2}} \cdot \cancel{(x-2)} &= \frac{4}{\cancel{(x-2)}\cdot(x+2)} \cdot \cancel{(x-2)} && \\
1 &= \frac{4}{x+2} && \mid \cdot (x+2) \\
1 \cdot (x+2) &= \frac{4}{\cancel{x+2}} \cdot \cancel{(x+2)} && \\
x + 2 &= 4 && \mid -2 \\
x &= 2 &&
\end{aligned}$$

Die Lösung $x = 2$ müssen wir verwerfen, also gibt es keine Lösung!