Aufgabe 2

a)

$$f(x) = -x^2 + x + 2$$

1)

$$f(0) = -0^2 + 0 + 2 = 2$$

Der Graph schneidet die y-Achse bei $y = 2$.

2)

$$\begin{aligned} -x^2 + x + 2 &= 0 && \mid \cdot (-1) \\ x^2 - x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-2)} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \\ &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\ x_1 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \\ x_2 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \end{aligned}$$

Der Graph schneidet die x-Achse bei $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$.

3) Die Parabel ist nach unten geöffnet (die Zahl vor x^2 ist kleiner Null: $a < 0$) und der Scheitelpunkt S ist somit der höchste Punkt des Graphen. Mit quadratischer Ergänzung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
f(x) &= -x^2 + x + 2 \\
&= -(x^2 - x) + 2 \\
&= -\left(x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + 2 \\
&= -\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + 2 \\
&= -\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) + 2 \\
&= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + 2 \\
&= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt S liegt bei

$$\left(\frac{1}{2} \mid 2\frac{1}{4}\right)$$

b)

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-3)^2$$

1)

$$f(0) = \frac{1}{2} \cdot (0-3)^2 = 4{,}5$$

Der Graph schneidet die y-Achse bei $y = 4{,}5$.

2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 &= 0 && \left| : \frac{1}{2} \right. \\ (x-3)^2 &= 0 && |\sqrt{} \\ x-3 &= 0 && |+3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Der Graph schneidet die x-Achse bei $x = 3$.

3) Die Parabel ist nach oben geöffnet ($a > 0$) und der Scheitelpunkt S ist somit der tiefste Punkt des Graphen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 + 0 \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt S liegt bei

$$(3 \mid 0)$$

c)

$$f(x) = x^2 - 4x + 2$$

1)

$$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 2 = 2$$

Der Graph schneidet die y-Achse bei $y = 2$.

2)

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4x + 2 &= 0 \\
x_{1,2} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 2} \\
&= 2 \pm \sqrt{4-2} \\
&= 2 \pm \sqrt{2} \\
x_1 &= 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}41 \\
x_2 &= 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59
\end{aligned}
$$

Der Graph schneidet die x-Achse bei $x_1 = 2 + \sqrt{2}$ und $x_2 = 2 - \sqrt{2}$.

3) Die Parabel ist nach oben geöffnet ($a > 0$) und der Scheitelpunkt S ist somit der tiefste Punkt des Graphen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 - 4x + 2 \\
&= (x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) + 2 \\
&= \left((x-2)^2 - 2^2\right) + 2 \\
&= (x-2)^2 - 4 + 2 \\
&= (x-2)^2 - 2
\end{aligned}
$$

Der Scheitelpunkt S liegt bei

$$(2 \mid -2)$$

d)

$$f(x) = 2x \cdot (x+1)$$

1)

$$f(0) = 2 \cdot 0 \cdot (0+1) = 0$$

Der Graph schneidet die y-Achse bei $y = 0$.

2)

$$\begin{aligned} 2x \cdot (x+1) &= 0 \\ 2x &= 0 && \mid :2 \\ x_1 &= 0 \\ x+1 &= 0 && \mid -1 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Der Graph schneidet die x-Achse bei $x_1 = 0$ und $x_2 = -1$.

3) Zunächst lösen wir die Klammern auf:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x \cdot (x+1) \\ &= 2x^2 + 2x \end{aligned}$$

Die Parabel ist nach oben geöffnet ($a > 0$) und der Scheitelpunkt S ist somit der tiefste Punkt des Graphen.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 2x \\ &= 2 \cdot (x^2 + x) \\ &= 2 \cdot \left(x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right) \\ &= 2 \cdot \left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right) \\ &= 2 \cdot \left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right) \\ &= 2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt S liegt bei

$$\left(-\frac{1}{2} \mid -\frac{1}{2} \right)$$

e)

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}$$

1)

$$f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Der Graph schneidet die y-Achse bei $y = \frac{3}{4}$.

2)

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4} &= 0 && \mid -\frac{3}{4} \\
-\frac{1}{2}x^2 &= -\frac{3}{4} && \mid \cdot (-1) \\
\frac{1}{2}x^2 &= \frac{3}{4} && \mid : \frac{1}{2} \\
x^2 &= \frac{3}{2} && \mid \sqrt{} \\
x &= \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1{,}22
\end{aligned}$$

Der Graph schneidet die x-Achse bei $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$.

3) Die Parabel ist nach unten geöffnet ($a < 0$) und der Scheitelpunkt S ist somit der höchste Punkt des Graphen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4} \\
&= -\frac{1}{2}(x-0)^2 + \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt S liegt bei

$$\left(0 \mid \frac{3}{4}\right)$$

f)

$$f(x) = -\frac{2}{3} \cdot (x-1)(x-3)$$

1)

$$f(0) = -\frac{2}{3} \cdot (0-1)(0-3) = -2$$

Der Graph schneidet die y-Achse bei $y = -2$.

2)

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} \cdot (x-1)(x-3) &= 0 \\ x - 1 &= 0 && \mid +1 \\ x_1 &= 1 \\ x - 3 &= 0 && \mid +3 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Der Graph schneidet die x-Achse bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.

3) Zunächst lösen wir die Klammern auf:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{2}{3} \cdot (x-1)(x-3) \\ &= -\frac{2}{3} \cdot (x^2 - 3x - x + 3) \\ &= -\frac{2}{3} \cdot (x^2 - 4x + 3) \\ &= -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 2 \end{aligned}$$

Die Parabel ist nach unten geöffnet ($a < 0$) und der Scheitelpunkt

S ist somit der höchste Punkt des Graphen.

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 2 \\
&= -\frac{2}{3} \cdot (x^2 - 4x) - 2 \\
&= -\frac{2}{3} \cdot (x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) - 2 \\
&= -\frac{2}{3} \cdot \left((x-2)^2 - 2^2\right) - 2 \\
&= -\frac{2}{3} \cdot \left((x-2)^2 - 4\right) - 2 \\
&= -\frac{2}{3} \cdot (x-2)^2 + \frac{8}{3} - 2 \\
&= -\frac{2}{3} \cdot (x-2)^2 + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt S liegt bei

$$\left(2 \mid \frac{2}{3}\right)$$

Aufgabe 3

1)

$$f(x) = x^2 - x + 4$$

$P(-2 \mid 10)$:

$$\begin{aligned}
10 &= (-2)^2 - (-2) + 4 \\
10 &= 4 + 2 + 4 \\
10 &= 10
\end{aligned}$$

Der Punkt P liegt auf der Parabel.

$Q(5 \mid 20)$:

$$\begin{aligned}
20 &= 5^2 - 5 + 4 \\
20 &= 25 - 5 + 4 \\
20 &\neq 24
\end{aligned}$$

Der Punkt Q liegt nicht auf der Parabel.

2)

$$f(x) = 2 \cdot (x-3)(x+5)$$

$P(5 \mid 40)$:

$$\begin{aligned}
40 &= 2 \cdot (5-3)(5+5) \\
40 &= 2 \cdot 2 \cdot 10 \\
40 &= 40
\end{aligned}$$

Der Punkt P liegt auf der Parabel.

$Q\left(-\frac{1}{2} \mid -\frac{63}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}
-\frac{63}{2} &= 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - 3\right)\left(-\frac{1}{2} + 5\right) \\
-\frac{63}{2} &= 2 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot \frac{9}{2} \\
-\frac{63}{2} &= -\frac{63}{2}
\end{aligned}$$

Der Punkt Q liegt ebenfalls auf der Parabel.