Aufgabe 4

$$h(x) = -0{,}0003x^2 + 0{,}1x$$

Dabei steht x für die Entfernung vom Ursprung und $h(x)$ für die Höhe über der Wasseroberfläche in Meter.

a) Gesucht ist der Abstand zwischen den Nullstellen:

$$\begin{aligned}
-0{,}0003x^2 + 0{,}1x &= 0 \\
x \cdot (-0{,}0003x + 0{,}1) &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
-0{,}0003x + 0{,}1 &= 0 && \mid -0{,}1 \\
-0{,}0003x &= -0{,}1 && \mid : (-0{,}0003) \\
x_2 &\approx 333{,}33
\end{aligned}$$

Direkt über dem Wasser ist der Brückenbogen $333{,}33 - 0 = 333{,}33$ Meter breit.

b) Die Parabel ist nach unten geöffnet ($a < 0$) und deswegen ist der Scheitelpunkt S der höchste Punkt der Parabel.

$$\begin{aligned}
h(x) &= -0{,}0003x^2 + 0{,}1x \\
&= -0{,}0003 \cdot (x^2 - 333{,}33x) \\
&= -0{,}0003 \cdot (x^2 - 333{,}33x + 166{,}67^2 - 166{,}67^2) \\
&= -0{,}0003 \cdot \left((x - 166{,}67)^2 - 166{,}67^2\right) \\
&= -0{,}0003 \cdot \left((x - 166{,}67)^2 - 27778{,}89\right) \\
&= -0{,}0003 \cdot (x - 166{,}67)^2 + 8{,}33
\end{aligned}$$

Der höchste Punkt des Brückenbogens befindet sich also 8,33 m über der Wasseroberfläche.

c) Die Höhe des Brückenbogens muss laut der Aufgabenstellung größer als die Masthöhe (8 m) sein:

$$
\begin{aligned}
-0{,}0003x^2 + 0{,}1x &= 8 && \mid -8 \\
-0{,}0003x^2 + 0{,}1x - 8 &= 0 && \mid : (-0{,}0003) \\
x^2 - 333{,}33x + 26.666{,}67 &= 0
\end{aligned}
$$

Mit $p = -333{,}33$ und $q = 26.666{,}67$ erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{-333{,}33}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-333{,}33}{2}\right)^2 - 26.666{,}67} \\
&= 166{,}67 \pm \sqrt{27.778{,}89 - 26.666{,}67} \\
&= 166{,}67 \pm \sqrt{1112{,}22} \\
&= 166{,}67 \pm 33{,}35 \\
x_1 &= 166{,}67 + 33{,}35 = 200{,}02 \\
x_2 &= 166{,}67 - 33{,}35 = 133{,}32
\end{aligned}
$$

Das Boot kann in dem Bereich von 133,32 m bis 200,02 m (jeweils Entfernung vom Ursprung) den Brückenbogen passieren.