Aufgabe 4

a)

x — die Breite des Grundstücks (in m)
y — die Länge des Grundstücks (in m)

Wir wissen, dass der Umfang 100 m beträgt und mit

$$U_{\text{Rechteck}} = 2 \cdot (a + b)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} 100 &= 2 \cdot (x + y) && \mid :2 \\ 50 &= x + y && \mid -x \\ 50 - x &= y \end{aligned}$$

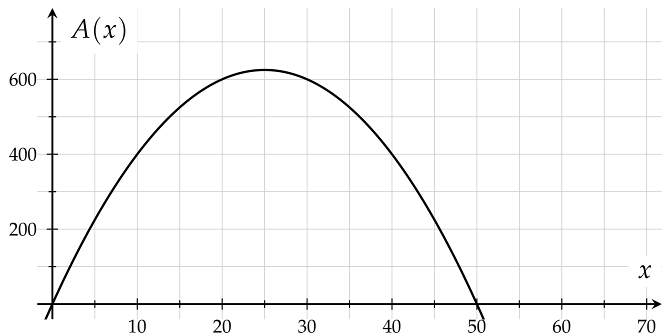
Der Flächeninhalt lässt sich mit der Formel

$$A_{\text{Rechteck}} = a \cdot b$$

bestimmen. Wir erhalten so die Funktion

$$A(x) = x \cdot (50 - x) = 50x - x^2 = -x^2 + 50x$$

Der Funktionswert $A(x)$ steht dabei für den Flächeninhalt in m^2. Der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel (wegen $a < 0$):



Der höchste Punkt der Parabel mit dem höchsten Funktionswert ist hiermit der Scheitelpunkt.

Wir suchen also nach dem Scheitelpunkt:

$$\begin{aligned}
A(x) &= -x^2 + 50x \\
&= -1 \cdot (x^2 - 50x) \\
&= -1 \cdot (x^2 - 50x + 25^2 - 25^2) \\
&= -1 \cdot \left((x-25)^2 - 25^2\right) \\
&= -1 \cdot \left((x-25)^2 - 625\right) \\
&= -(x-25)^2 + 625
\end{aligned}$$

<u>Alternative</u>: Wir nutzen die Tatsache aus, dass die Parabeln symmetrisch sind und der Scheitelpunkt deswegen in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen liegt:

$$\begin{aligned}
-x^2 + 50x &= 0 \\
x \cdot (-x + 50) &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
-x + 50 &= 0 && | + x \\
50 &= x_2
\end{aligned}$$

Der Mittelwert lautet

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 50}{2} = 25$$

$$A(25) = -25^2 + 50 \cdot 25 = 625$$

Die Koordinaten des Scheitelpunktes lauten also

$$S(25 \mid 625)$$

Den größtmöglichen Flächeninhalt ($625\ m^2$) erhält Joe wenn er $25\ m$ als Breite und $50 - 25 = 25\ m$ (wegen $y = 50 - x$) als Länge wählt, sich also für ein Quadrat entscheidet.

b)

x — die Breite des Grundstücks (in m)
y — die Länge des Grundstücks (in m)

Wir wissen, dass die Seillänge 100 m beträgt und da eine Seite des Grundstücks vom Fluss begrenzt wird, erhalten wir

$$100 = 2x + y \qquad | -2x$$
$$100 - 2x = y$$

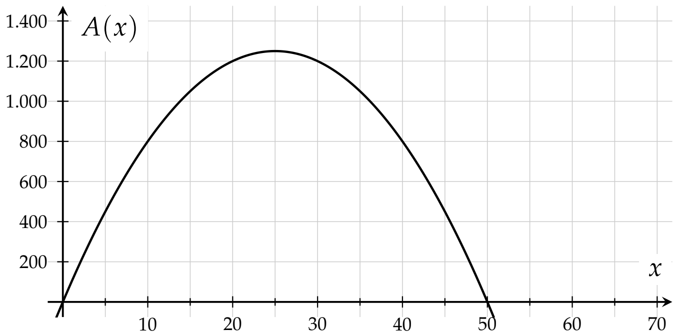
Der Flächeninhalt lässt sich mit der Formel

$$A_{\text{Rechteck}} = a \cdot b$$

bestimmen. Wir erhalten die Funktion

$$A(x) = x \cdot (100 - 2x) = 100x - 2x^2 = -2x^2 + 100x$$

Der Funktionswert $A(x)$ steht dabei für den Flächeninhalt in m^2. Der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel (wegen $a < 0$):



Der höchste Punkt der Parabel mit dem höchsten Funktionswert ist hiermit der Scheitelpunkt.

Wir suchen also nach dem Scheitelpunkt:

$$\begin{aligned}A(x) &= -2x^2 + 100x \\ &= -2 \cdot (x^2 - 50x) \\ &= -2 \cdot (x^2 - 50x + 25^2 - 25^2) \\ &= -2 \cdot \left((x-25)^2 - 25^2\right) \\ &= -2 \cdot \left((x-25)^2 - 625\right) \\ &= -2 \cdot (x-25)^2 + 1250\end{aligned}$$

Alternative: Wir nutzen die Tatsache aus, dass die Parabeln symmetrisch sind und der Scheitelpunkt deswegen in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen liegt:

$$\begin{aligned}-2x^2 + 100x &= 0 \\ x \cdot (-2x + 100) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ -2x + 100 &= 0 && \mid -100 \\ -2x &= -100 && \mid :(-2) \\ x &= 50\end{aligned}$$

Der Mittelwert lautet

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 50}{2} = 25$$

$$A(25) = -2 \cdot 25^2 + 100 \cdot 25 = 1250$$

Die Koordinaten des Scheitelpunktes lauten also

$$S(25 \mid 1250)$$

Den größtmöglichen Flächeninhalt (1250 m^2) erhält Joe wenn er 25 m als Breite und $100 - 2 \cdot 25 = 50$ m (wegen $y = 100 - 2x$) als Länge wählt.

c)

x — die Breite des Grundstücks (in m)
y — die Länge des Grundstücks (in m)

Wir wissen, dass die Seillänge 100 m beträgt und das eine Seite des Grundstücks bereits durch die 20 m lange Mauer teilweise begrenzt ist (und deswegen die Länge $y - 20$ bzw. $x - 20$ statt y oder x hat), wir erhalten also

$$\begin{aligned} 100 &= 2x + y + y - 20 \\ 100 &= 2x + 2y - 20 && \mid +20 \\ 120 &= 2x + 2y && \mid -2x \\ 120 - 2x &= 2y && \mid :2 \\ 60 - x &= y \end{aligned}$$

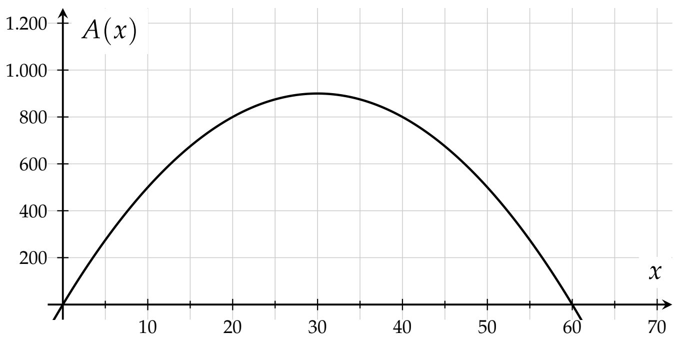
Der Flächeninhalt lässt sich mit der Formel

$$A_{\text{Rechteck}} = a \cdot b$$

bestimmen. Wir erhalten die Funktion

$$A(x) = x \cdot (60 - x) = 60x - x^2 = -x^2 + 60x$$

Der Funktionswert $A(x)$ steht dabei für den Flächeninhalt in m^2. Der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel (wegen $a < 0$):



Der höchste Punkt der Parabel mit dem höchsten Funktionswert ist hiermit der Scheitelpunkt.

Wir suchen also nach dem Scheitelpunkt:

$$\begin{aligned} A(x) &= -x^2 + 60x \\ &= -1 \cdot (x^2 - 60x) \\ &= -1 \cdot (x^2 - 60x + 30^2 - 30^2) \\ &= -1 \cdot \left((x-30)^2 - 30^2\right) \\ &= -1 \cdot \left((x-30)^2 - 900\right) \\ &= -(x-30)^2 + 900 \end{aligned}$$

<u>Alternative</u>: Wir nutzen die Tatsache aus, dass die Parabeln symmetrisch sind und der Scheitelpunkt deswegen in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen liegt:

$$\begin{aligned} -x^2 + 60x &= 0 \\ x \cdot (-x + 60) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ -x + 60 &= 0 \qquad\qquad\qquad \mid +x \\ 60 &= x_2 \end{aligned}$$

Der Mittelwert lautet

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 60}{2} = 30$$

$$A(30) = -30^2 + 60 \cdot 30 = 900$$

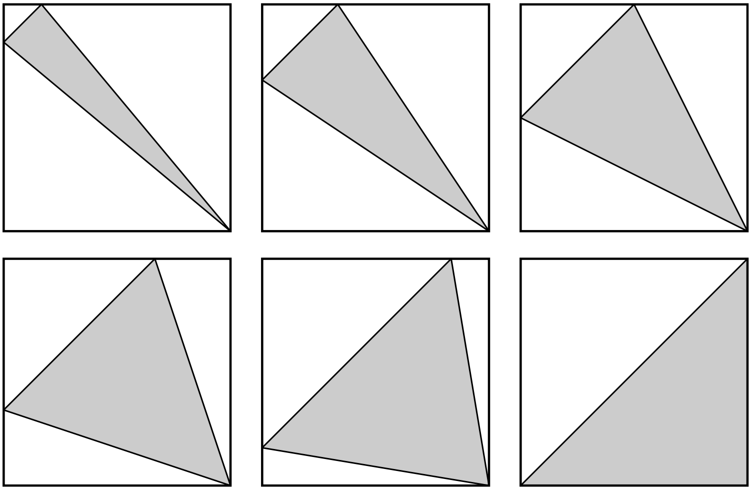
Die Koordinaten des Scheitelpunktes lauten also

$$S(30 \mid 900)$$

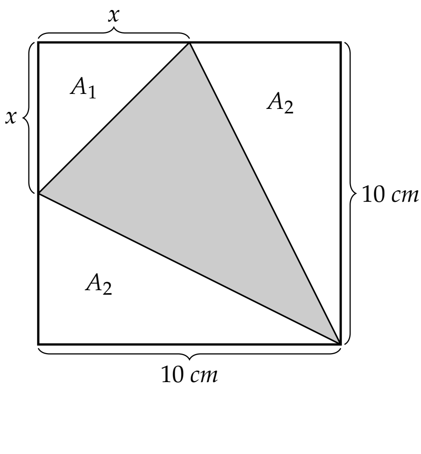
Den größtmöglichen Flächeninhalt ($900\ m^2$) erhält Joe wenn er $30\ m$ als Breite und $60 - 30 = 30\ m$ (wegen $y = 60 - x$) als Länge wählt.

Aufgabe 6

a)



b)



Mit

$$A_{\text{Quadrat}} = a^2 \qquad A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

erhalten wir

$$A_{\text{grau}} = A_{\text{Quadrat}} - A_1 - 2 \cdot A_2$$

Und mit

$$A_{\text{Quadrat}} = 10^2 = 100$$

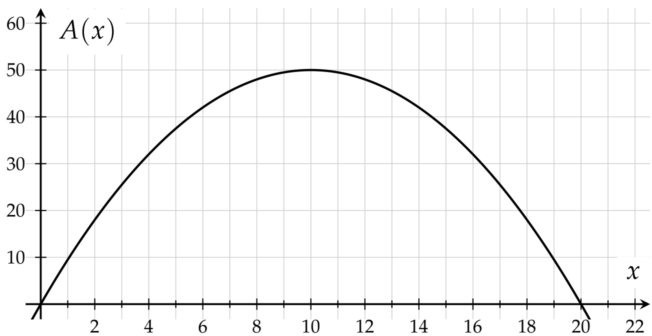
$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{1}{2}x^2$$

$$2 \cdot A_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10 - x) = 10 \cdot (10 - x) = 100 - 10x$$

erhalten wir die Funktion

$$\begin{aligned} A(x) &= 100 - \frac{1}{2}x^2 - (100 - 10x) \\ &= 100 - \frac{1}{2}x^2 - 100 + 10x \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 10x \end{aligned}$$

Der Funktionswert $A(x)$ steht dabei für den Flächeninhalt in cm^2. Der Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel (wegen $a < 0$):



Der höchste Punkt der Parabel mit dem höchsten Funktionswert ist hiermit der Scheitelpunkt.

Wir suchen also nach dem Scheitelpunkt:

$$\begin{aligned}
A(x) &= -\frac{1}{2}x^2 + 10x \\
&= -\frac{1}{2} \cdot (x^2 - 20x) \\
&= -\frac{1}{2} \cdot (x^2 - 20x + 10^2 - 10^2) \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \big((x-10)^2 - 10^2\big) \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \big((x-10)^2 - 100\big) \\
&= -\frac{1}{2} \cdot (x-10)^2 + 50
\end{aligned}$$

Alternative: Wir nutzen die Tatsache aus, dass die Parabeln symmetrisch sind und der Scheitelpunkt deswegen in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen liegt:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}x^2 + 10x &= 0 \\
x \cdot (-\frac{1}{2}x + 10) &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
-\frac{1}{2}x + 10 &= 0 && \mid -10 \\
-\frac{1}{2}x &= -10 && \mid : \left(-\frac{1}{2}\right) \\
x_2 &= 20
\end{aligned}$$

Der Mittelwert lautet

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0+20}{2} = 10$$

$$A(10) = -\frac{1}{2} \cdot 10^2 + 10 \cdot 10 = 50$$

Die Koordinaten des Scheitelpunktes lauten also

$$S(10 \mid 50)$$

Den größtmöglichen Flächeninhalt (50 cm^2) erhalten wir, wenn wir $x = 10\,cm$ wählen: