Aufgabe 9

a)

x — die Länge des Rechtecks (in cm)
$x + 6$ — die Breite des Rechtecks (in cm)

$$A_{\text{Rechteck}} = a \cdot b$$

Mit dem Flächeninhalt 91 cm^2 erhalten wir:

$$\begin{aligned} x \cdot (x+6) &= 91 \\ x^2 + 6x &= 91 && \mid -91 \\ x^2 + 6x - 91 &= 0 \\ x_{1,2} &= -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - (-91)} \\ &= -3 \pm \sqrt{9+91} \\ &= -3 \pm \sqrt{100} \\ &= -3 \pm 10 \\ x_1 &= -3 + 10 = 7 \\ x_2 &= -3 - 10 = -13 \end{aligned}$$

Die Länge kann nicht negativ sein, also ist das Rechteck 7 cm lang und $7 + 6 = 13$ cm breit.

b)

x — die Länge des Rechtecks (in m)
y — die Breite des Rechtecks (in m)

$$U_{\text{Rechteck}} = 2 \cdot (a + b)$$

Mit dem Umfang 40 m erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} 40 &= 2 \cdot (x + y) && \mid : 2 \\ 20 &= x + y && \mid - x \\ 20 - x &= y \end{aligned}$$

Mit dem Flächeninhalt 36 m^2 und

$$A_{\text{Rechteck}} = a \cdot b$$

folgt

$$\begin{aligned} 36 &= x \cdot (20 - x) \\ 36 &= 20x - x^2 && \mid - 36 \\ 0 &= -x^2 + 20x - 36 && \mid \cdot (-1) \\ 0 &= x^2 - 20x + 36 \\ x_{1,2} &= -\frac{-20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 - 36} \\ &= 10 \pm \sqrt{100 - 36} \\ &= 10 \pm \sqrt{64} \\ &= 10 \pm 8 \\ x_1 &= 10 + 8 = 18 \\ x_2 &= 10 - 8 = 2 \end{aligned}$$

Beide Lösungen sind positiv, es gibt also zwei Möglichkeiten: entweder ist das Rechteck 18 m lang und $20 - 18 = 2$ m breit oder es ist 2 m lang und $20 - 2 = 18$ m breit.

c)

Druckfehler: 32 $\underline{cm}^2$ statt 32 m^2!

x — die Seitenlänge des Quadrats (in cm)
$x-1$ — die Länge der verkürzten Seite (in cm)
$x+3$ — die Länge der verlängerten Seite (in cm)

$$A_{\text{Rechteck}} = a \cdot b$$

Mit dem Flächeninhalt 32 cm^2 erhalten wir

$$\begin{aligned}
32 &= (x-1)(x+3) \\
32 &= x^2 + 3x - x - 3 \\
32 &= x^2 + 2x - 3 && \mid -32 \\
0 &= x^2 + 2x - 35 \\
x_{1,2} &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-35)} \\
&= -1 \pm \sqrt{1+35} \\
&= -1 \pm \sqrt{36} \\
&= -1 \pm 6 \\
x_1 &= -1 + 6 = 5 \\
x_2 &= -1 - 6 = -7
\end{aligned}$$

Die Länge kann nicht negativ sein, also betrug die Seitenlänge des ursprünglichen Quadrates 5 cm und das Rechteck, welches daraus entstanden ist, ist $5-1=4$ cm lang und $5+3=15$ cm breit (oder andersrum).

Aufgabe 10

a)

x — die erste unbekannte Zahl
y — die zweite unbekannte Zahl

Die Summe der Zahlen beträgt 123, also

$$\begin{aligned} x + y &= 123 \qquad && |-x \\ y &= 123 - x \end{aligned}$$

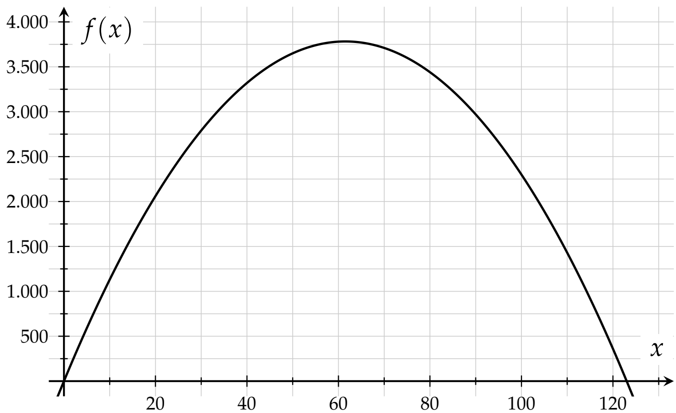
Das Produkt der Zahlen ist somit

$$x \cdot y = x \cdot (123 - x) = 123x - x^2$$

Es handelt sich dabei um eine quadratische Funktion

$$f(x) = -x^2 + 123x$$

deren Graph nach unten geöffnet ist (wegen $a < 0$). $f(x)$ steht dabei für das Produkt beider Zahlen. Der größte Funktionswert wird im Scheitelpunkt erreicht:



Wir suchen also nach dem Scheitelpunkt S:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 123x \\ &= -1 \cdot (x^2 - 123x) \\ &= -1 \cdot (x^2 - 123x + 61{,}5^2 - 61{,}5^2) \\ &= -1 \cdot \left((x - 61{,}5)^2 - 61{,}5^2\right) \\ &= -1 \cdot \left((x - 61{,}5)^2 - 3782{,}25\right) \\ &= -(x - 61{,}5)^2 + 3782{,}25 \end{aligned}$$

<u>Alternative</u>: Wir nutzen die Tatsache aus, dass die Parabeln symmetrisch sind und der Scheitelpunkt deswegen in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen liegt:

$$\begin{aligned} -x^2 + 123x &= 0 \\ x \cdot (-x + 123) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ -x + 123 &= 0 && \mid +x \\ 123 &= x_2 \end{aligned}$$

Der Mittelwert lautet

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 123}{2} = 61{,}5$$

$$f(61{,}5) = -61{,}5^2 + 123 \cdot 61{,}5 = 3782{,}25$$

Die Koordinaten des Scheitelpunktes lauten also

$$S(61{,}5 \mid 3782{,}25)$$

und das größte Produkt wird durch die Zerlegung

$$123 = 61{,}5 + 61{,}5$$

erreicht.

b)

x — die gesuchte Zahl
$x - 3$ — die um 3 verkleinerte Zahl
$x + 3$ — die um 3 vergrößerte Zahl

Mit dem Produkt gleich 41 erhalten wir:

$$\begin{aligned} (x-3)(x+3) &= 41 && \\ x^2 - 9 &= 41 && \mid +9 \\ x^2 &= 50 && \mid \sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm 5\sqrt{2} && \end{aligned}$$

Die gesuchte Zahl lautet also entweder $5\sqrt{2}$ oder $-5\sqrt{2}$.

c)

x — die unbekannte Zahl
$x + 1$ — die darauffolgende (natürliche!) Zahl

Das Produkt ist genauso groß wie das Dreifache der kleineren Zahl, also

$$\begin{aligned} x \cdot (x+1) &= 3x && \\ x^2 + x &= 3x && \mid -3x \\ x^2 - 2x &= 0 && \\ x \cdot (x-2) &= 0 && \\ x_1 &= 0 && \\ x - 2 &= 0 && \mid +2 \\ x_2 &= 2 && \end{aligned}$$

Die Zahlen lauten 0 und $0 + 1 = 1$ oder 2 und $2 + 1 = 3$.