Aufgabe 8

Ist das Dreieck rechtwinklig, so gilt der Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Die Hypotenuse ist immer die längste Seite!

a)

$$(3, 4, 5)$$

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\ 9 + 16 &= 25 \\ 25 &= 25 \end{aligned}$$

Somit ist $(3, 4, 5)$ ein pythagoreischer Tripel.

$$(5, 12, 13)$$

$$\begin{aligned} 5^2 + 12^2 &= 13^2 \\ 25 + 144 &= 169 \\ 169 &= 169 \end{aligned}$$

Somit ist $(5, 12, 13)$ ein pythagoreischer Tripel.

b)

$$(6, 8, 10)$$

$$\begin{aligned} 6^2 + 8^2 &= 10^2 \\ 36 + 64 &= 100 \\ 100 &= 100 \end{aligned}$$

Somit ist $(6, 8, 10)$ ein pythagoreischer Tripel.

$$(9, 12, 15)$$

$$\begin{aligned} 9^2 + 12^2 &= 15^2 \\ 81 + 144 &= 225 \\ 225 &= 225 \end{aligned}$$

Somit ist $(9, 12, 15)$ ein pythagoreischer Tripel.

Lukas hat alle drei Zahlen des Tripels $(3, 4, 5)$ mit 2 bzw. 3 multipliziert und dadurch zwei neue Tripel erhalten.

c)

$$(3k, 4k, 5k)$$

$$\begin{aligned} (3k)^2 + (4k)^2 &= (5k)^2 \\ 9k^2 + 16k^2 &= 25k^2 \\ 25k^2 &= 25k^2 \end{aligned}$$

Die Gleichung bleibt erfüllt unabhängig davon, welchen Wert für k man einsetzt. Somit ist $(3k, 4k, 5k)$ ein pythagoreischer Tripel für alle k.

Eine weitere Familie pythagoreischer Tripel ist beispielsweise

$$(5k, 12k, 13k)$$

$$\begin{aligned} (5k)^2 + (12k)^2 &= (13k)^2 \\ 25k^2 + 144k^2 &= 169k^2 \\ 169k^2 &= 169k^2 \end{aligned}$$

d) *1)*

$$x = u^2 - v^2 \qquad y = 2uv \qquad z = u^2 + v^2$$

Mit $u = 3$ und $v = 2$ erhalten wir beispielsweise:

$$\begin{aligned} x &= 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 \\ y &= 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12 \\ z &= 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13 \end{aligned}$$

Der gefundene pythagoreische Tripel ist also $(5, 12, 13)$.

Im Allgemein gilt

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z^2 \\ \left(u^2 - v^2\right)^2 + \left(2uv\right)^2 &= \left(u^2 + v^2\right)^2 \\ u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 &= u^4 + 2u^2v^2 + v^4 \\ u^4 + 2u^2v^2 + v^4 &= u^4 + 2u^2v^2 + v^4 \end{aligned}$$

Die Gleichung bleibt erfüllt für alle natürlichen Zahlen u und v mit $u > 0$.

2)

Für ungerade Zahlen $2n + 1$, die gleichzeitig Quadratzahlen sind, gilt

$$\left(\sqrt{2n+1}, n, n+1\right)$$

ist ein pythagoreischer Tripel.

Eine solche Zahl ist

$$121 = 2 \cdot 60 + 1$$

das heißt $n = 60$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} \sqrt{2 \cdot 60 + 1} &= \sqrt{121} = 11 \\ 60 + 1 &= 61 \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} 11^2 + 60^2 &= 61^2 \\ 121 + 3600 &= 3721 \\ 3721 &= 3721 \end{aligned}$$

folgt, dass $(11, 60, 61)$ ein pythagoreischer Tripel ist.

Im Allgemeinen gilt

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2n+1}\right)^2 + n^2 &= \left(n+1\right)^2 \\ 2n + 1 + n^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ n^2 + 2n + 1 &= n^2 + 2n + 1 \end{aligned}$$

Die Gleichung bleibt erfüllt für alle natürlichen Zahlen n.