Aufgabe 4

$$a^2 + b^2 = c^2$$

a) Das Dreieck ist gleichseitig, die Höhe halbiert somit die Grundseite.

$$\begin{aligned} 2^2 + h^2 &= 4^2 & \\ 4 + h^2 &= 16 & \quad | -4 \\ h^2 &= 12 & \quad |\sqrt{} \\ h &= 2\sqrt{3} \approx 3{,}46\ [LE] & \end{aligned}$$

b) Die Seiten des Rechtecks $M_a = 5\ LE$ und $M_b = 3\ LE$ werden in zwei gleich große Hälften geteilt (M steht für „Mittelpunkt“).

$$U_{\text{Dreieck}} = a + b + c$$

Das Dreieck links oben:

$$\begin{aligned} 3^2 + 2{,}5^2 &= a^2 & \\ 9 + 6{,}25 &= a^2 & \\ 15{,}25 &= a^2 & \quad |\sqrt{} \\ a &\approx 3{,}91\ [LE] & \end{aligned}$$

Das Dreieck rechts unten:

$$\begin{aligned} 5^2 + 1{,}5^2 &= b^2 & \\ 25 + 2{,}25 &= b^2 & \\ 27{,}25 &= b^2 & \quad |\sqrt{} \\ b &\approx 5{,}22\ [LE] & \end{aligned}$$

Das Dreiecks rechts oben:

$$\begin{aligned} 1{,}5^2 + 2{,}5^2 &= c^2 \\ 2{,}25 + 6{,}25 &= c^2 \\ 8{,}5 &= c^2 \qquad\qquad |\sqrt{} \\ c &\approx 2{,}92\ [LE] \end{aligned}$$

Das heißt

$$U = 3{,}91 + 5{,}22 + 2{,}92 = 12{,}05\ [LE]$$

c) Das Trapez ist gleichschenklig.

Die waagerechte Kathete im großen Dreieck links ist somit

$$10 - \frac{10-6}{2} = 10 - 2 = 8\ [LE]$$

lang.

$$\begin{aligned} 8^2 + 5^2 &= e^2 \\ 64 + 25 &= e^2 \\ 89 &= e^2 \qquad\qquad |\sqrt{} \\ e &= \sqrt{89} \approx 9{,}43\ [LE] \end{aligned}$$

Die waagerechte Kathete im kleinen Dreieck rechts ist

$$\frac{10-6}{2} = 2\ [LE]$$

lang.

$$\begin{aligned} 5^2 + 2^2 &= s^2 \\ 25 + 4 &= s^2 \\ 29 &= s^2 \qquad\qquad |\sqrt{} \\ s &= \sqrt{29} \approx 5{,}39\ [LE] \end{aligned}$$

d) Zunächst berechnen wir die Länge der Bodendiagonale:

$$\begin{aligned} 3^2 + 3^2 &= c^2 \\ 9 + 9 &= c^2 \\ 18 &= c^2 & \qquad |\sqrt{\ } \\ c &= 3\sqrt{2} \approx 4{,}24\ [LE] \end{aligned}$$

Um die Raumdiagonale d zu berechnen ist es besser, den exakten Wert zu verwenden:

$$\begin{aligned} 3^2 + (3\sqrt{2})^2 &= d^2 \\ 9 + 9 \cdot 2 &= d^2 \\ 27 &= d^2 & \qquad |\sqrt{\ } \\ d &= 3\sqrt{3} \approx 5{,}2\ [LE] \end{aligned}$$

e) Die Diagonalen der quadratischen Grundfläche der Pyramide halbieren sich gegenseitig. Wir berechnen zunächst die Länge einer solchen Bodendiagonale.

$$\begin{aligned} 4^2 + 4^2 &= c^2 \\ 16 + 16 &= c^2 \\ 32 &= c^2 & \qquad |\sqrt{\ } \\ c &= 4\sqrt{2} \approx 5{,}66\ [LE] \end{aligned}$$

Für die waagerechte Kathete nehmen wir nur die halbe Länge der Diagonale:

$$\frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = 2{,}83\ [LE]$$

Um die Seitenlänge s zu berechnen ist es besser, den exakten Wert zu verwenden:

$$
\begin{aligned}
3^2 + (2\sqrt{2})^2 &= s^2 \\
9 + 8 &= s^2 \\
17 &= s^2 && |\sqrt{\ } \\
s &= \sqrt{17} \approx 4{,}12\ [LE]
\end{aligned}
$$

Die Seitenfläche der Pyramide ist ein gleichschenkliges Dreieck, die Seitenhöhe h' halbiert somit die Grundseite.

$$
\begin{aligned}
h'^2 + 2^2 &= \sqrt{17}^2 \\
h'^2 + 4 &= 17 && |-4 \\
h'^2 &= 13 && |\sqrt{\ } \\
h' &= \sqrt{13} \approx 3{,}61\ [LE]
\end{aligned}
$$

f)

$$U_{\text{Sechseck}} = a + b + c + d + e + f$$

Das Sechseck ist regelmäßig, alle 6 Seiten sind gleich lang.

$$U_{\text{Sechseck}} = 6a$$

Die Kanten des Würfels werden in je zwei gleich große Hälften geteilt (M steht für „Mittelpunkt“).

$$
\begin{aligned}
2{,}5^2 + 2{,}5^2 &= c^2 \\
6{,}25 + 6{,}25 &= c^2 \\
12{,}5 &= c^2 && |\sqrt{\ } \\
c &\approx 3{,}54\ [LE]
\end{aligned}
$$

Das heißt

$$U = 6 \cdot 3{,}54 = 21{,}24\ [LE]$$