Aufgabe 16

$$f(x) = \frac{1}{10}x^3 + \frac{9}{10}x^2 - \frac{9}{5}x + 4$$
$$g(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$$
$$0 \leqslant x \leqslant 6$$

a)

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= \frac{1}{10}x^3 + \frac{9}{10}x^2 - \frac{9}{5}x + 4 - \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\right) \\ &= \frac{1}{10}x^3 + \frac{9}{10}x^2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{5}x - \frac{3}{2}x + 4 \\ &= \frac{1}{10}x^3 + \frac{13}{20}x^2 - \frac{33}{10}x + 4 \end{aligned}$$

b) Notwendige Bedingung: $h'(x) = 0$

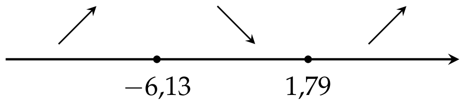
$$h'(x) = \frac{3}{10}x^2 + \frac{13}{10}x - \frac{33}{10}$$
$$\frac{3}{10}x^2 + \frac{13}{10}x - \frac{33}{10} = 0$$

Mit `Run-Matrix` → $\boxed{\text{OPTN}}$ → `CALC` $\boxed{\text{F4}}$ → `SolveN` $\boxed{\text{F5}}$

$$x_1 \approx -6{,}13$$
$$x_2 \approx 1{,}79$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $h'(x)$

$$\begin{aligned}
h'(-7) &= \frac{3}{10} \cdot (-7)^2 + \frac{13}{10} \cdot (-7) - \frac{33}{10} = 2\frac{3}{10} > 0 \\
h'(0) &= \frac{3}{10} \cdot 0^2 + \frac{13}{10} \cdot 0 - \frac{33}{10} = -3\frac{3}{10} < 0 \\
h'(2) &= \frac{3}{10} \cdot 2^2 + \frac{13}{10} \cdot 2 - \frac{33}{10} = \frac{1}{2} > 0
\end{aligned}$$



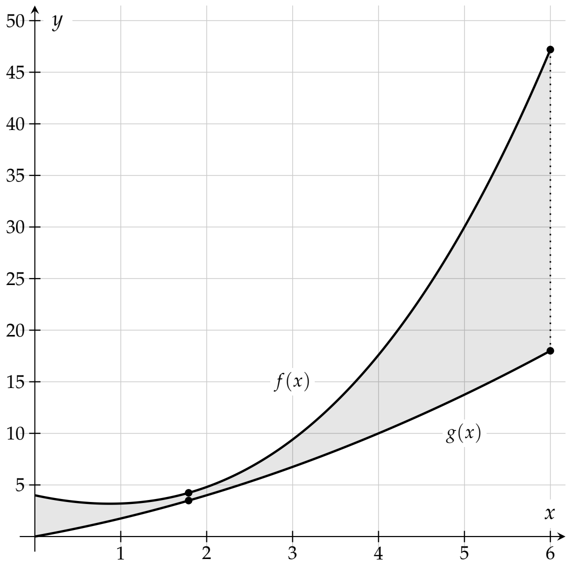
Das heißt an der Stelle $x = -6{,}13$ befindet sich ein lokaler Hochpunkt und an der Stelle $x = 1{,}79$ ein lokaler Tiefpunkt.

$$h(1{,}79) = \frac{1}{10} \cdot 1{,}79^3 + \frac{13}{20} \cdot 1{,}79^2 - \frac{33}{10} \cdot 1{,}79 + 4 \approx 0{,}75$$

Die Stelle $x = -6{,}13$ liegt außerhalb des Intervalls $0 \leqslant x \leqslant 6$, die „schmalste" bzw. die „breiteste" Stelle könnte aber noch an den Intervallgrenzen liegen:

$$\begin{aligned}
h(0) &= \frac{1}{10} \cdot 0^3 + \frac{13}{20} \cdot 0^2 - \frac{33}{10} \cdot 0 + 4 = 4 \\
h(6) &= \frac{1}{10} \cdot 6^3 + \frac{13}{20} \cdot 6^2 - \frac{33}{10} \cdot 6 + 4 = 29{,}2
\end{aligned}$$

Die schmalste Stelle im betrachteten Intervall liegt also bei $x = 1{,}79$ mit der Höhe $0{,}75\ m$ und die breiteste bei $x = 6$ mit der Höhe $29{,}2\ m$.



Aufgabe 17

$$K(x) = 2x^3 - 45x^2 + 380x + 70$$
$$0 < x < 25$$

a) Notwendige Bedingung: $K'(x) = 0$

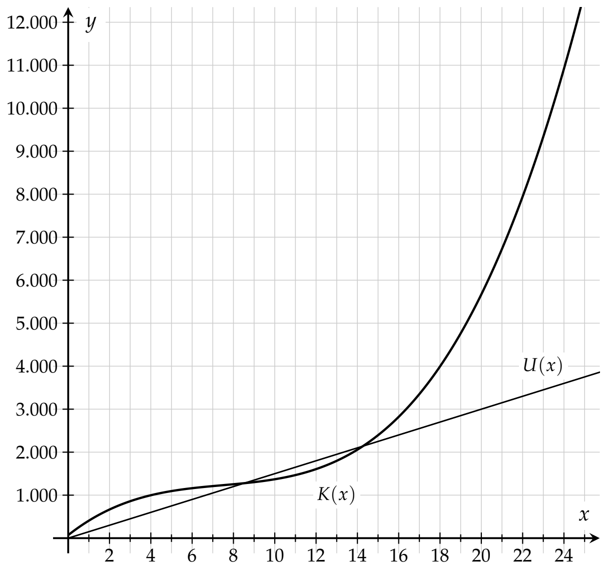
$$K'(x) = 6x^2 - 90x + 380$$
$$6x^2 - 90x + 380 = 0$$

Mit `Run-Matrix` → OPTN → `CALC` F4 → `SolveN` F5: Keine Lösung.

Die notwendige Bedingung ist nicht erfüllt und somit kann es keine Extremstellen geben.

Je mehr Geräte produziert werden, desto höher werden die Produktionskosten, es kann also so etwas wie „maximale Kosten“ gar nicht geben. Die „kleinstmöglichen Kosten“ betragen $K(0) = 70$ € und können nur dann erreicht werden, wenn man die Produktion stoppt.

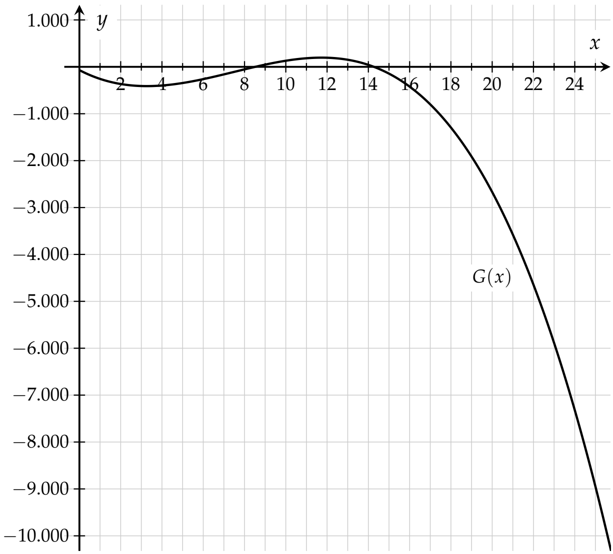
b)



c)

$$\begin{aligned} G(x) &= U(x) - K(x) \\ &= 150x - (2x^3 - 45x^2 + 380x + 70) \\ &= 150x - 2x^3 + 45x^2 - 380x - 70 \\ &= -2x^3 + 45x^2 - 230x - 70 \end{aligned}$$

Die Firma erzielt Gewinn, falls der Funktionswert der Gewinnfunktion positiv ist $\big(G(x) > 0\big)$, sonst $\big(G(x) < 0\big)$ macht die Firma Verluste („schreibt rote Zahlen“).



Mit `Graph` → `DRAW` F6 → SHIFT → `G-SOLVE` F5 → `ROOT` F1 :

$$x_1 \approx 8{,}52$$
$$x_2 \approx 14{,}27$$

Für 0 bis 9 bzw. mehr als 14 Geräte pro Woche macht die Firma Verluste und für 9 bis 14 Geräte pro Woche erzielt die Firma Gewinn.

d) Notwendige Bedingung: $G'(x) = 0$

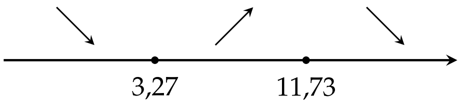
$$G'(x) = -6x^2 + 90x - 230$$
$$-6x^2 + 90x - 230 = 0$$

Mit `Run-Matrix` $\rightarrow$ $\boxed{\text{OPTN}}$ $\rightarrow$ `CALC` $\boxed{\text{F4}}$ $\rightarrow$ `SolveN` $\boxed{\text{F5}}$

$$x_1 \approx 3{,}27$$
$$x_2 \approx 11{,}73$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $G'(x)$

$$G'(0) = -6 \cdot 0^2 + 90 \cdot 0 - 230 = -230 < 0$$
$$G'(4) = -6 \cdot 4^2 + 90 \cdot 4 - 230 = 34 > 0$$
$$G'(12) = -6 \cdot 12^2 + 90 \cdot 12 - 230 = -14 < 0$$



Das heißt an der Stelle $x = 3{,}27$ befindet sich ein lokaler Tiefpunkt und an der Stelle $x = 11{,}73$ ein lokaler Hochpunkt.

$$G(11{,}73) = -2 \cdot 11{,}73^3 + 45 \cdot 11{,}73^2 - 230 \cdot 11{,}73 - 70 \approx 195{,}85$$

Dieser Hochpunkt ist auch ein globaler Hochpunkt für $0 < x < 25$, weil

$$G(0) = -2 \cdot 0^3 + 45 \cdot 0^2 - 230 \cdot 0 - 70 = -70 < 195{,}85$$
$$G(25) = -2 \cdot 25^3 + 45 \cdot 25^2 - 230 \cdot 25 - 70 = -8945 < 195{,}85$$

Außerdem (da es nicht möglich ist 11,73 Geräte zu produzieren):

$$G(11) = -2 \cdot 11^3 + 45 \cdot 11^2 - 230 \cdot 11 - 70 = 183$$
$$G(12) = -2 \cdot 12^3 + 45 \cdot 12^2 - 230 \cdot 12 - 70 = 194$$

Das heißt, ökonomisch gesehen ist es nicht sinnvoll, mehr als 12 Geräte pro Woche zu produzieren.