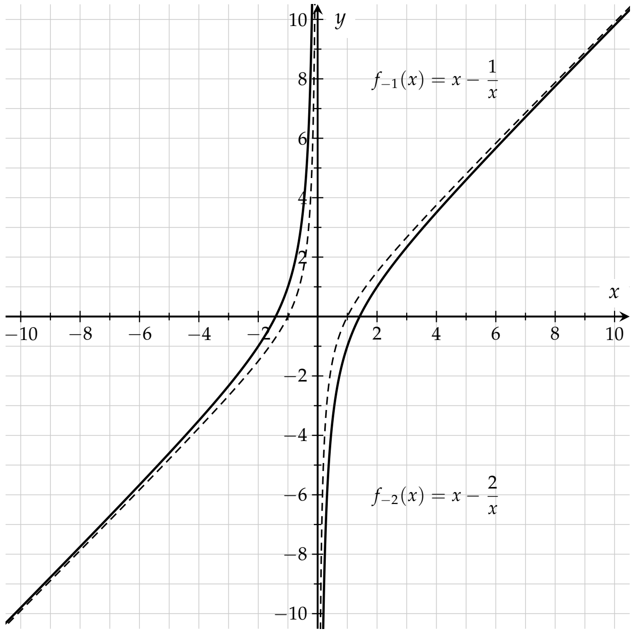
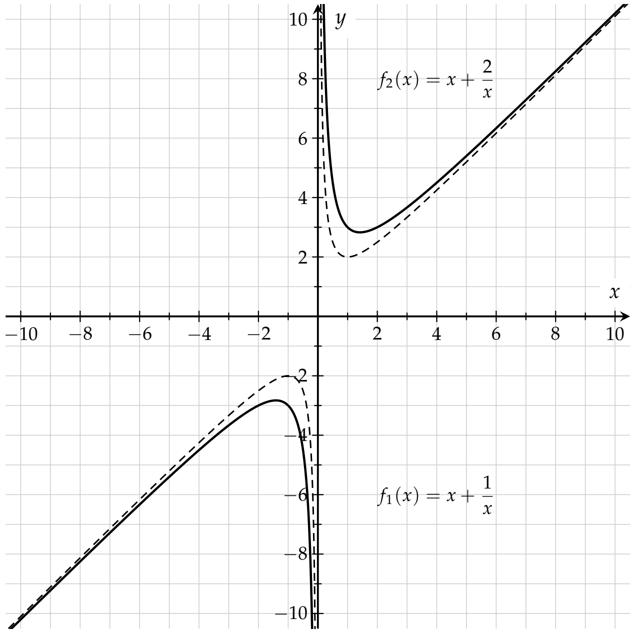
Aufgabe 21

$$f_t(x) = x + \frac{t}{x} \qquad x \neq 0 \qquad t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

a) Für $t = -2$ und $t = -1$ (gestrichelt):



Für $t = 2$ und $t = 1$ (gestrichelt):



b) Ist $t < 0$, so besitzt der Graph zwei Schnittpunkte mit der x-Achse $\big($siehe (a) für $t = -2$ und $t = -1\big)$. Für $t > 0$ besitzt der Graph genau einen lokalen Hoch- sowie genau einen lokalen Tiefpunkt $\big($siehe (a) für $t = 1$ und $t = 2\big)$.

c)

$$f_t(x) = x + \frac{t}{x} \qquad t < 0$$

$$x + \frac{t}{x} = 0 \qquad | \cdot x \ (x \neq 0)$$

$$x^2 + t = 0 \qquad | - t$$

$$
\begin{aligned}
x^2 &= -t && |\sqrt{\ } \\
x_{1,2} &= \pm\sqrt{-t}
\end{aligned}
$$

Hier ist $t < 0$ (negativ), also ist $-t > 0$ (positiv!), deswegen können wir auch die Wurzel $\sqrt{-t}$ tatsächlich ziehen. $f_t(x)$ besitzt also genau zwei Nullstellen, falls $t < 0$ ist.

Weiterhin gilt

$$f_t(x) = x + \frac{t}{x} = x + t \cdot \frac{1}{x} = x + t \cdot x^{-1} \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

Deswegen lautet

$$f_t'(x) = 1 + (-1) \cdot t \cdot x^{-1-1} = 1 - tx^{-2} = 1 - \frac{t}{x^2}$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
1 - \frac{t}{x^2} &= 0 && \Big| + \frac{t}{x^2} \\
1 &= \frac{t}{x^2} && | \cdot x^2 \ (x \neq 0) \\
x^2 &= t && |\sqrt{\ } \\
x_{1,2} &= \pm\sqrt{t}
\end{aligned}
$$

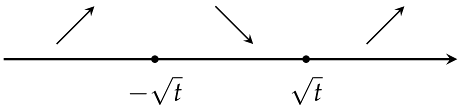
Hier ist $t > 0$ (positiv), also können wir die Wurzel $\sqrt{t}$ auch tatsächlich ziehen.

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$f'(-t) = 1 - \frac{t}{(-t)^2} = 1 - \frac{1}{t} > 0 \qquad \text{(weil } t > 0 \text{ ist)}$$

$$f'\left(\sqrt{\frac{t}{2}}\right) = 1 - \frac{t}{\left(\sqrt{\frac{t}{2}}\right)^2} = 1 - \frac{t}{\frac{t}{2}} = 1 - \frac{t}{\frac{t}{2}} = 1 - 2 = -1 < 0$$

$$f'(t) = 1 - \frac{t}{t^2} = 1 - \frac{1}{t} > 0 \qquad \text{(weil } t > 0 \text{ ist)}$$



Somit befindet sich an der Stelle $x_1 = -\sqrt{t}$ ein lokaler Hochpunkt und an der Stelle $x_2 = \sqrt{t}$ ein lokaler Tiefpunkt.

Aufgabe 22

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^2 \cdot y$$

a) Für $x = 1$:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot y \\
1 &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot y && \left| : \frac{1}{3} \right. \\
3 &= \pi \cdot y && | : \pi \\
\frac{3}{\pi} &= y
\end{aligned}$$

Für $x = 10$:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot y \\
1 &= \frac{100}{3} \cdot \pi \cdot y && \left| : \frac{100}{3} \right.
\end{aligned}$$

$$\frac{3}{100} = \pi \cdot y \qquad | : \pi$$
$$\frac{3}{100\pi} = y$$

Für $x = 100$:

$$1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 100^2 \cdot y$$
$$1 = \frac{10.000}{3} \cdot \pi \cdot y \qquad | : \frac{10.000}{3}$$
$$\frac{3}{10.000} = \pi \cdot y \qquad | : \pi$$
$$\frac{3}{10.000\pi} = y$$

Je größer wird der Wert von x, desto kleiner wird der Wert von y. Für $x \to +\infty$ wird deswegen $y \to 0$ streben.

b) Für $y = 100$:

$$1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^2 \cdot 100$$
$$1 = \frac{100}{3} \cdot \pi \cdot x^2 \qquad | : \frac{100}{3}$$
$$\frac{3}{100} = \pi \cdot x^2 \qquad | : \pi$$

$$\frac{3}{100\pi} = x^2 \qquad |\sqrt{\ }$$
$$\pm\sqrt{\frac{3}{100\pi}} = x_{1,2}$$

Negative Längen ergeben keinen Sinn, also muss $x = \sqrt{\frac{3}{100\pi}}$ sein.

Größere Werte von x ergeben kleinere Werte für y, also damit $y > 100$ bleibt, muss $x < \sqrt{\frac{3}{100\pi}}$ sein.

Für $y \to +\infty$ wird deswegen $x \to 0$ streben.

c) Mit $V = 1\ [dm^3]$:

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^2 \cdot y && \left| : \frac{1}{3} \right. \\
3 &= \pi \cdot x^2 \cdot y && |: x^2\ (x > 0) \\
\frac{3}{x^2} &= \pi \cdot y && |: \pi \\
\frac{3}{\pi x^2} &= y
\end{aligned}
$$

$$M = \pi \cdot x \cdot s$$

Nach dem Satz des Pythagoras:

$$x^2 + y^2 = s^2$$

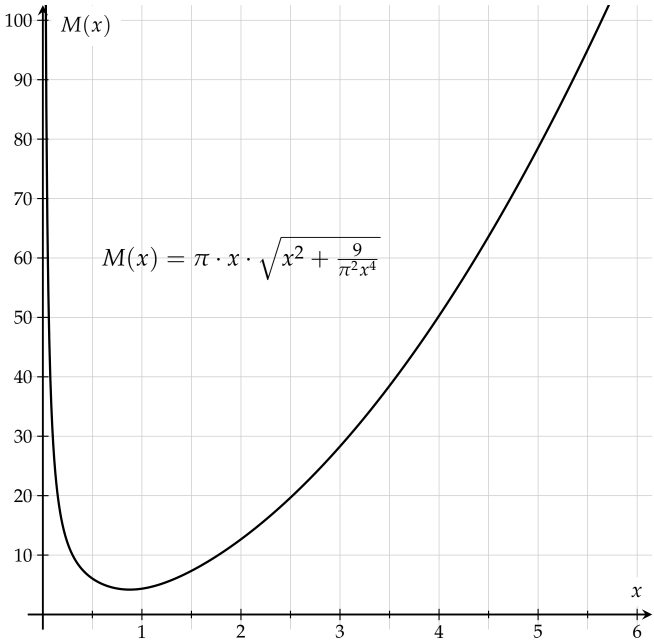
also

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{\pi x^2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{9}{\pi^2 x^4}}$$

Somit ist

$$M(x) = \pi \cdot x \cdot \sqrt{x^2 + \frac{9}{\pi^2 x^4}}$$

Sowohl für $x \to 0$ als auch für $x \to +\infty$ wird $M(x) \to +\infty$ streben:



Mit GTR: Der Graph besitzt einen (für positive x-Werte) globalen Tiefpunkt an der Stelle $x \approx 0{,}88$.

Die kleinstmögliche Mantelfläche eines Kegels mit dem Volumen $1\ dm^3$ ist somit:

$$M(0{,}88) = \pi \cdot 0{,}88 \cdot \sqrt{0{,}88^2 + \frac{9}{\pi^2 0{,}88^4}} \approx 4{,}19\ [dm^2]$$