Aufgabe 1

$$f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x$$

a)

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
-2x^3 + 9x^2 - 12x &= 0 \\
x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x &= 0 \\
x \cdot \left(x^2 - \frac{9}{2}x + 6\right) &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
x^2 - \frac{9}{2}x + 6 &= 0 \\
x_{2,3} &= \frac{\frac{9}{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{9}{2}}{2}\right)^2 - 6} \\
&= \frac{9}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 - 6} \\
&= \frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16} - \frac{96}{16}}
\end{aligned}$$

Keine Lösung. Die einzige Nullstelle ist $x = 0$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^2 + 18x - 12 \\ -6x^2 + 18x - 12 &= 0 \\ x^2 - 3x + 2 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} \\ &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} \\ &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ x_1 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(0) &= -6 \cdot 0^2 + 18 \cdot 0 - 12 = -12 < 0 \\ f'\left(\frac{3}{2}\right) &= -6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 18 \cdot \frac{3}{2} - 12 \\ &= -6 \cdot \frac{9}{4} + 9 \cdot 3 - 12 \\ &= -\frac{27}{2} + 27 - 12 \\ &= -13{,}5 + 15 = 1{,}5 > 0 \\ f'(3) &= -6 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 - 12 = -54 + 54 - 12 = -12 < 0 \end{aligned}$$

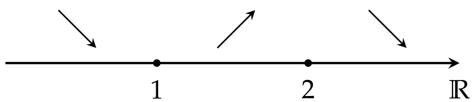
Die Funktion f besitzt an der Stelle $x_1 = 1$ einen lokalen Tiefpunkt T und an der Stelle $x_2 = 2$ einen lokalen Hochpunkt H.

$$f(1) = -2 \cdot 1^3 + 9 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 = -2 + 9 - 12 = -5$$
$$f(2) = -2 \cdot 2^3 + 9 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 = -16 + 36 - 24 = -4$$

$$T(1|-5), \quad H(2|-4)$$

b) Die ganzrationale Funktion f ist weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse, weil die Exponenten von x sowohl gerade, als auch ungerade sind.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ f'(0) &= -12 < 0 \\ f'\left(\frac{3}{2}\right) &= 1{,}5 > 0 \\ f'(3) &= -12 < 0 \end{aligned}$$



Die Funktion f ist streng monoton fallend in Intervallen

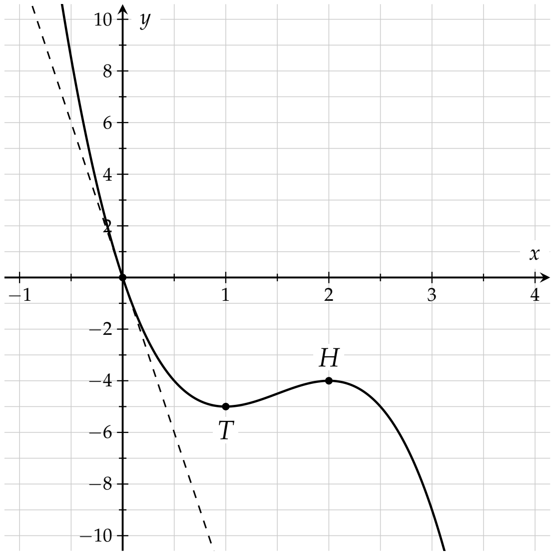
$$I_1 = (-\infty; 1] \quad \text{und} \quad I_3 = [2; +\infty)$$

und streng monoton steigend im Intervall

$$I_2 = [1; 2]$$

Für $x \to \pm\infty$ $\quad f(x) \to -2x^3$
Für $x \to 0$ $\quad f(x) \to -12x$

c)



d)

$$\begin{aligned}
t(x) &= m_t \cdot x + b \\
f'(0) &= -6 \cdot 0^2 + 18 \cdot 0 - 12 = -12 = m_t \\
t(x) &= -12x + b \\
0 &= -12 \cdot 0 + b \\
0 &= b \\
t(x) &= -12x
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - 2x$$

a) Mit der y-Achse:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ f(0) &= \frac{1}{9}\cdot 0^3 - \frac{1}{6}\cdot 0^2 - 2\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0|0)$.

Mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - 2x &= 0 \\ x\cdot\left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x - 2\right) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x - 2 &= 0 \\ x^2 - \frac{3}{2}x - 18 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{\frac{3}{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2 + 18} \\ &= \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{288}{16}} \\ &= \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{297}{16}} \end{aligned}$$

$$x_2 = \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{33}}{4} = \frac{3+3\sqrt{33}}{4} \approx 5{,}06$$
$$x_3 = \frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{33}}{4} = \frac{3-3\sqrt{33}}{4} \approx -3{,}56$$

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$$(0{,}0), \quad \left(\frac{3+3\sqrt{33}}{4}\middle|0\right), \quad \left(\frac{3-3\sqrt{33}}{4}\middle|0\right)$$

b) Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 2$$
$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 2 = 0$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6}$$
$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}}$$
$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$
$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$
$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

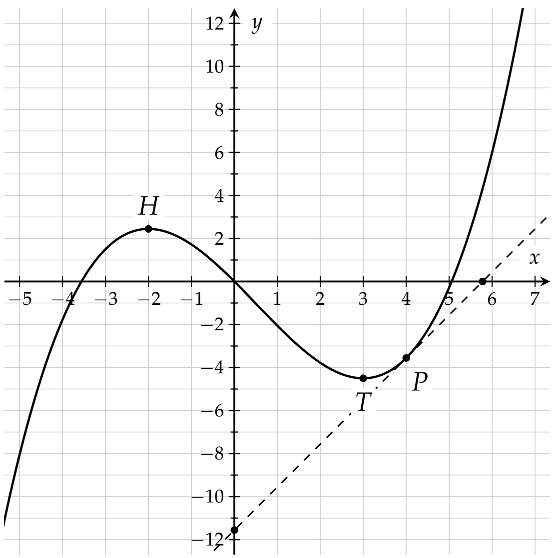
Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$f'(-3) = \frac{1}{3} \cdot (-3)^2 - \frac{1}{3} \cdot (-3) - 2 = 2 > 0$$
$$f'(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^2 - \frac{1}{3} \cdot 0 - 2 = -2 < 0$$
$$f'(4) = \frac{1}{3} \cdot 4^2 - \frac{1}{3} \cdot 4 - 2 = 2 > 0$$

Die Funktion f besitzt an der Stelle $x_1 = -2$ einen lokalen Hochpunkt H und an der Stelle $x_2 = 3$ einen lokalen Tiefpunkt T.

$$f(-2) = \frac{1}{9} \cdot (-2)^3 - \frac{1}{6} \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) = \frac{22}{9} = 2\frac{4}{9}$$
$$f(3) = \frac{1}{9} \cdot 3^3 - \frac{1}{6} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 = -\frac{9}{2} = -4{,}5$$

$$H\left(-2 \middle| 2\frac{4}{9}\right), \quad T(3|-4{,}5)$$



c)

$$t(x) = m_t \cdot x + b$$
$$f'(4) = \frac{1}{3} \cdot 4^2 - \frac{1}{3} \cdot 4 - 2 = 2 = m_t$$
$$t(x) = 2x + b$$
$$f(4) = \frac{1}{9} \cdot 4^3 - \frac{1}{6} \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 = -3\frac{5}{9}$$
$$-3\frac{5}{9} = 2 \cdot 4 + b$$
$$-11\frac{5}{9} = b$$
$$t(x) = 2x - 11\frac{5}{9}$$

y-Achsenabschnitt:

$$x = 0$$
$$t(0) = 2 \cdot 0 - 11\frac{5}{9} = -11\frac{5}{9}$$

Nullstelle:

$$t(x) = 0$$
$$0 = 2x - 11\frac{5}{9}$$
$$5\frac{7}{9} = x$$

Flächeninhalt vom Dreieck:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$
$$A = \frac{1}{2} \cdot 5\frac{7}{9} \cdot \left(-11\frac{5}{9}\right) = 33\frac{31}{81} \approx 33{,}38$$

Aufgabe 5

$$K(x) = 0{,}044x^3 - 2x^2 + 50x + 600 \qquad U(x) = 60x$$

a) Notwendige Bedingung: $K'(x) = 0$

$$\begin{aligned} K'(x) &= 0{,}132x^2 - 4x + 50 \\ 0{,}132x^2 - 4x + 50 &= 0 \\ x^2 - 30{,}3x + 378{,}79 &= 0 \\ x_{1,2} &= 15{,}15 \pm \sqrt{15{,}15^2 - 378{,}79} \\ &= 15{,}15 \pm \sqrt{229{,}52 - 378{,}79} \end{aligned}$$

Keine Lösung. Somit besitzt die Funktion K keine Extremstellen.

Die Produktionskosten wachsen (unabhängig vom produzierten Produkt) streng monoton: je mehr Produkte werden produziert, desto höher sind die Kosten. Somit kann die Funktion K keine Extremstellen besitzen.

b)

$$\begin{aligned} G(x) &= U(x) - K(x) \\ &= 60x - (0{,}044x^3 - 2x^2 + 50x + 600) \\ &= 60x - 0{,}044x^3 + 2x^2 - 50x - 600 \\ &= -0{,}044x^3 + 2x^2 + 10x - 600 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung: $G'(x) = 0$

$$\begin{aligned} G'(x) &= -0{,}132x^2 + 4x + 10 \\ -0{,}132x^2 + 4x + 10 &= 0 \\ x^2 - 30{,}3x - 75{,}76 &= 0 \\ x_{1,2} &= 15{,}15 \pm \sqrt{15{,}15^2 + 75{,}76} \\ &= 15{,}15 \pm \sqrt{229{,}52 + 75{,}76} \\ &= 15{,}15 \pm \sqrt{305{,}28} \\ x_1 &= 15{,}15 + 17{,}47 = 32{,}62 \\ x_2 &= 15{,}15 - 17{,}47 = -2{,}32 \end{aligned}$$

$x_2 = -2{,}32$ kommt nicht in Frage, weil die Stückzahl nicht negativ sein kann.

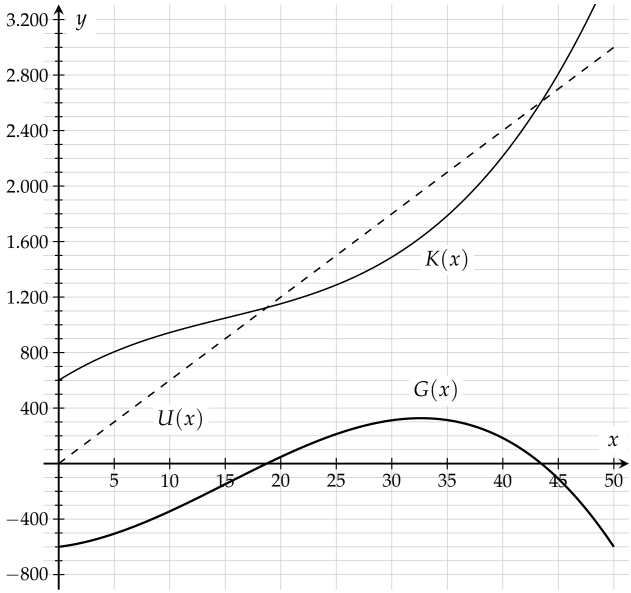
Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $G'(x)$

$$\begin{aligned} G'(32) &= -0{,}132 \cdot 32^2 + 4 \cdot 32 + 10 \approx 2{,}83 > 0 \\ G'(33) &= -0{,}132 \cdot 33^2 + 4 \cdot 33 + 10 \approx -1{,}75 < 0 \end{aligned}$$

Die Funktion G besitzt einen lokalen Hochpunkt an der Stelle $x = 32{,}62$, das heißt der Gewinn ist für ≈ 33 verkauften Geräten am höchsten.

$$G(33) = -0{,}044 \cdot 33^3 + 2 \cdot 33^2 + 10 \cdot 33 - 600 \approx 326{,}77$$

Der maximale Gewinn beträgt $\approx 326{,}77$ €.


y
x
3.200
2.800
2.400
2.000
1.600
1.200
800
400
−400
−800
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
K(x)
G(x)
U(x)