Aufgabe 17

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 - \frac{9}{8}$$

a)

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 - \frac{9}{8}x^0$$

Bei f handelt es sich um eine ganzrationale Funktion, alle Exponenten von x sind gerade, deswegen ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse.

b) Mit der y-Achse:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ f(0) &= \frac{1}{8} \cdot 0^4 - 0^2 - \frac{9}{8} = -\frac{9}{8} = -1\frac{1}{8} \end{aligned}$$

Die Koordinaten vom Schnittpunkt mit der y-Achse lauten:

$$S_y \left(0 \middle| -1\frac{1}{8}\right)$$

Mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 0 &= \frac{1}{8}x^4 - x^2 - \frac{9}{8} \end{aligned}$$

Sei $x^2 = z$:

$$\frac{1}{8}z^2 - z - \frac{9}{8} = 0$$

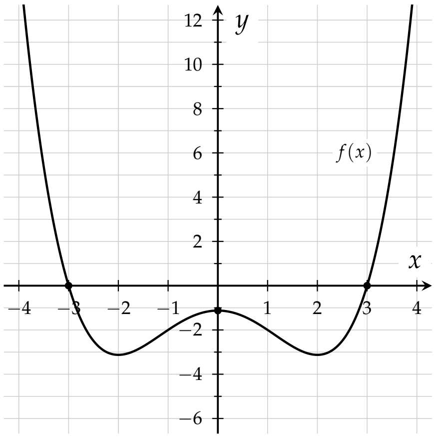
$$
\begin{aligned}
z^2 - 8z - 9 = 0 & \\
z_{1,2} &= \frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + 9} \\
&= 4 \pm \sqrt{25} \\
&= 4 \pm 5 \\
z_1 &= 4 + 5 = 9 \\
z_2 &= 4 - 5 = -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 9 \\
x_{1,2} &= \pm 3
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
x^2 &= -1 \\
&\text{Keine Lösung in } \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Die Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse lauten also:

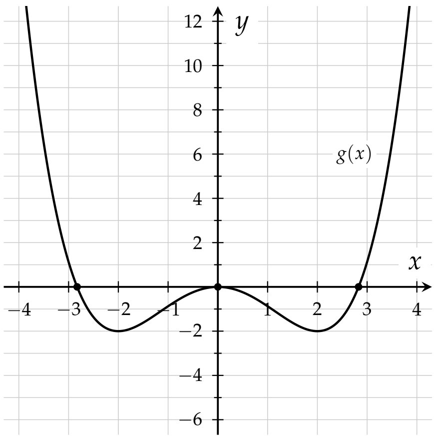
$$N_1(-3|0), \quad N_2(3|0)$$

c)



d) Der Graph müsste um $\frac{9}{8}$ Einheiten in y-Richtung (nach oben) verschoben werden:

$$g(x) = f(x) + \frac{9}{8} = \frac{1}{8}x^4 - x^2$$



Die Schnittpunkte mit der x-Achse:

$$\begin{aligned}
g(x) &= 0 \\
\frac{1}{8}x^4 - x^2 &= 0 \\
x^2 \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 - 1\right) &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
\frac{1}{8}x^2 - 1 &= 0 \\
\frac{1}{8}x^2 &= 1 \\
x^2 &= 8 \\
x_{3,4} &= \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$N_1(0|0), \quad N_2\left(-2\sqrt{2}\middle|0\right), \quad N_3\left(2\sqrt{2}\middle|0\right)$$