Aufgabe 7

a)

$$h(t) = h_0 + v_0 t - 5t^2$$

Mit $h_0 = 1{,}5$ und $v_0 = 5$ eingesetzt erhalten wir:

$$h(t) = 1{,}5 + 5t - 5t^2$$

Die Geschwindigkeit $v(t)$ ist die erste Ableitung der Strecke (der Höhe) $h'(t)$:

$$v(t) = h'(t) = 5 - 10t$$

Für $t = 2$ erhalten wir:

$$v(2) = 5 - 10 \cdot 2 = -15$$

Die Geschwindigkeit des Balls nach 2 Sekunden beträgt $-15 \left[\frac{m}{s}\right]$ (negativ, weil der Ball fällt).

Die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 5$ wird halbiert: $5 : 2 = 2{,}5 \left[\frac{m}{s}\right]$

Wir suchen nach dem Zeitpunkt (also t):

$$\begin{aligned} v(t) &= 2{,}5 \\ 5 - 10t &= 2{,}5 && \mid -5 \\ -10t &= -2{,}5 && \mid : (-10) \\ t &= 0{,}25 \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit hat sich nach 0,25 Sekunden halbiert.

Der höchste Punkt einer nach unten geöffneten Parabel ist ihr Scheitelpunkt S. Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung finden wir seine Koordinaten:

$$\begin{aligned} h(t) &= 1{,}5 + 5t - 5t^2 \\ &= -5t^2 + 5t + 1{,}5 \\ &= -5 \cdot (t^2 - t - 0{,}3) \\ &= -5 \cdot (t^2 - t + 0{,}5^2 - 0{,}5^2 - 0{,}3) \\ &= -5 \cdot \big((t - 0{,}5)^2 - 0{,}25 - 0{,}3\big) \\ &= -5 \cdot \big((t - 0{,}5)^2 - 0{,}55\big) \\ &= -5 \cdot (t - 0{,}5)^2 + 2{,}75 \end{aligned}$$

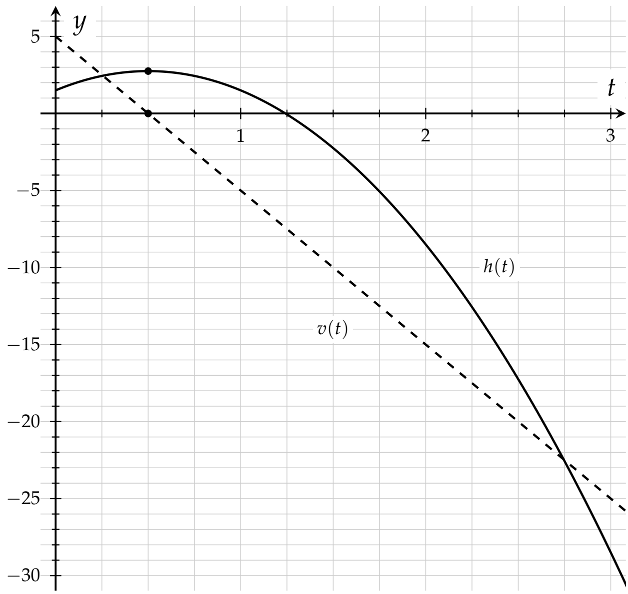
Also

$$S\,(0{,}5 \mid 2{,}75)$$

Der Ball hat nach 0,5 Sekunden den höchsten Punkt erreicht.

<u>Alternative</u> („Tipp: Im höchsten Punkt ist die Geschwindigkeit null"):

$$\begin{aligned} v(t) &= 0 & & \\ 5 - 10t &= 0 & &\mid -5 \\ -10t &= -5 & &\mid : (-10) \\ t &= 0{,}5 & & \end{aligned}$$



b)

$$h(t) = h_0 + v_0 t - 5t^2$$

Mit $h_0 = 1{,}5$ eingesetzt erhalten wir:

$$\begin{aligned} h(t) &= 1{,}5 + v_0 t - 5t^2 \\ &= -5t^2 + v_0 t + 1{,}5 \end{aligned}$$

Den höchsten Punkt einer nach unten geöffneten Parabel, den Scheitelpunkt S, bestimmen wir mit Hilfe der quadratischen Ergänzung (v_0 ist einfach eine Zahl!):

$$\begin{aligned} h(t) &= -5t^2 + v_0 t + 1{,}5 \\ &= -5 \cdot \left(t^2 - \frac{v_0}{5} t - 0{,}3\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -5 \cdot \left(t^2 - \frac{v_0}{5}t + \left(\frac{v_0}{10}\right)^2 - \left(\frac{v_0}{10}\right)^2 - 0{,}3\right) \\
&= -5 \cdot \left(t^2 - \frac{v_0}{5}t + \left(\frac{v_0}{10}\right)^2 - \left(\frac{v_0}{10}\right)^2 - 0{,}3\right) \\
&= -5 \cdot \left(\left(t - \frac{v_0}{10}\right)^2 - \frac{v_0^2}{100} - 0{,}3\right) \\
&= -5 \cdot \left(t - \frac{v_0}{10}\right)^2 + \frac{v_0^2}{20} + 1{,}5
\end{aligned}
$$

Also

$$S\left(\frac{v_0}{10} \mid \frac{v_0^2}{20} + 1{,}5\right)$$

Die maximale Ballhöhe beträgt somit

$$\frac{v_0^2}{20} + 1{,}5$$

Die maximale Höhe muss aber nach der Vorgabe 5 m betragen:

$$
\begin{aligned}
\frac{v_0^2}{20} + 1{,}5 &= 5 && \mid -1{,}5 \\
\frac{v_0^2}{20} &= 3{,}5 && \mid \cdot 20 \\
v_0^2 &= 70 && \mid \sqrt{} \\
v_0 &= \pm\sqrt{70} \approx \pm 8{,}37
\end{aligned}
$$

Nur die positive Geschwindigkeit passt zum Kontext der Aufgabe (der Ball soll ja nach oben fliegen!). Die Abwurfgeschwindigkeit muss also 8,37 $\left[\frac{m}{s}\right]$ betragen, damit der Ball bei einer Abwurfhöhe von 1,5 m die maximale Höhe von 5 m erreicht.

Alternative („Tipp: Im höchsten Punkt ist die Geschwindigkeit null“):

$$h(t) = 1{,}5 + v_0 t - 5t^2$$
$$v(t) = h'(t) = v_0 - 10t$$

$$\begin{aligned} v_0 - 10t &= 0 && \mid +10t \\ v_0 &= 10t && \mid : 10 \\ t &= \frac{v_0}{10} \end{aligned}$$

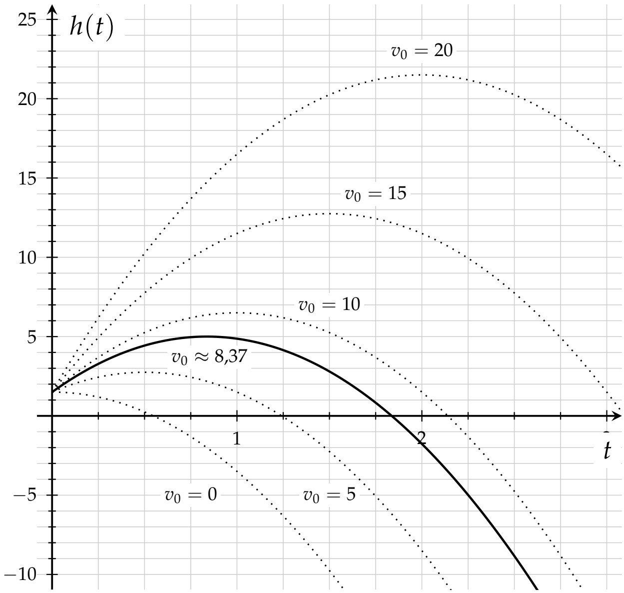
Das heißt, die maximale Höhe wird zum Zeitpunkt $t = \frac{v_0}{10}$ erreicht.

$$\begin{aligned} h\left(\frac{v_0}{10}\right) &= 1{,}5 + v_0 \cdot \left(\frac{v_0}{10}\right) - 5 \cdot \left(\frac{v_0}{10}\right)^2 \\ &= 1{,}5 + \frac{v_0^2}{10} - 5 \cdot \frac{v_0^2}{100} \\ &= 1{,}5 + \frac{v_0^2}{10} - \frac{v_0^2}{20} \\ &= 1{,}5 + \frac{2v_0^2}{20} - \frac{v_0^2}{20} \\ &= 1{,}5 + \frac{v_0^2}{20} \end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt $t = \frac{v_0}{10}$ muss die Höhe nach der Vorgabe 5 m betragen:

$$\begin{aligned} h\left(\frac{v_0}{10}\right) &= 5 \\ 1{,}5 + \frac{v_0^2}{20} &= 5 && \mid -1{,}5 \\ \frac{v_0^2}{20} &= 3{,}5 && \mid \cdot 20 \\ v_0^2 &= 70 && \mid \sqrt{} \\ v_0 &= \pm\sqrt{70} \approx \pm 8{,}37 \end{aligned}$$

Nur die positive Geschwindigkeit passt zum Kontext der Aufgabe (der Ball fliegt nach oben!). Die Abwurfgeschwindigkeit muss also $v_0 \approx 8{,}37 \left[\frac{m}{s}\right]$, damit der Ball bei einer Abwurfhöhe von 1,5 m die maximale Höhe von 5 m erreicht.



c)

$$h(t) = h_0 + v_0 t - 5t^2$$

Die Geschwindigkeit $v(t)$ ist die erste Ableitung der Strecke (der Höhe) $h'(t)$. Die Unbekannten Werte h_0 und v_0 sind dabei einfach Zahlen (Konstanten)!

$$v(t) = h'(t) = 0 + v_0 \cdot 1 - 5 \cdot 2t = v_0 - 10t$$