Aufgabe 11

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot x = x^2 \\ f'(x) &= 2x \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x &\neq 0 \\ f(x) &= x^5 : x = x^4 \\ f'(x) &= 4x^3 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x &\neq 0 \\ f(x) &= \frac{x^2 + x}{x} = x + 1 \\ f'(x) &= 1 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \\ f'(x) &= 2x + 2 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1+x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \\ f'(x) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

f)

$$f(x) = \frac{1+x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{x}{x} = \frac{1}{x} + 1 = x^{-1} + 1$$
$$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

g)

$$f(x) = ax^c$$
$$f'(x) = acx^{c-1}$$

h)

$$f(x) = x^{2+c} + c^2$$
$$f'(x) = (2+c)x^{1+c}$$

i)

$$f(x) = x^3 + cx$$
$$f'(x) = 3x^2 + c$$

Aufgabe 12

$$g(x) = 10 - 3x \qquad m = -3$$

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= -0{,}01x^3 \\ f'(x) &= -0{,}03x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3 \\ -3 &= -0{,}03x^2 \\ 100 &= x^2 \\ x_{1,2} &= \pm 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(10) &= -0{,}01 \cdot 10^3 = -10 \\ f(-10) &= -0{,}01 \cdot (-10)^3 = 10 \end{aligned}$$

Die Tangente an den Graphen von f ist parallel zur Geraden g in

$$P_1\,(10 \mid -10) \text{ und } P_2\,(-10 \mid 10)$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + a \\ f'(x) &= -2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3 \\ -3 &= -2x \\ 1{,}5 &= x \\ f(1{,}5) &= -(1{,}5)^2 + a = -2{,}25 + a \end{aligned}$$

Die Tangente an den Graphen von f ist parallel zur Geraden g im Punkt

$$P\,(1{,}5 \mid -2{,}25 + a)$$

c)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= bx^2 \\
f'(x) &= 2bx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -3 \\
-3 &= 2bx \\
\frac{-3}{2b} &= x \\
f\left(\frac{-3}{2b}\right) &= b\left(\frac{-3}{2b}\right)^2 = b \cdot \frac{9}{4b^2} = \frac{9}{4b}
\end{aligned}
$$

Die Tangente an den Graphen von f ist parallel zur Geraden g im Punkt

$$P\left(\frac{-3}{2b}\middle|\frac{9}{4b}\right)$$

d)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= bx^3 + c \\
f'(x) &= 3bx^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -3 \\
-3 &= 3bx^2 \\
\frac{-3}{3b} &= x^2 \\
\frac{-1}{b} &= x^2
\end{aligned}
$$

Ist $b > 0$ (positiv), so gibt es keine Lösung und somit auch keinen Punkt so, dass die Tangente an den Graphen von f parallel zur Geraden g verläuft. Ist $b < 0$ (negativ):

$$\frac{-1}{b} = x^2$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{b}}$$

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{b}}\right) = b \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{b}}\right)^3 + c = b \cdot \frac{1}{b} \cdot \sqrt{\frac{1}{b}} + c = \sqrt{\frac{1}{b}} + c$$
$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{b}}\right) = b \cdot \left(-\sqrt{\frac{1}{b}}\right)^3 + c = -b \cdot \frac{1}{b} \cdot \sqrt{\frac{1}{b}} + c = -\sqrt{\frac{1}{b}} + c$$

Die Tangente an den Graphen von f ist in diesem Fall parallel zur Geraden g in Punkten

$$P_1\left(\sqrt{\frac{1}{b}}\middle|\sqrt{\frac{1}{b}} + c\right) \text{ und } P_2\left(-\sqrt{\frac{1}{b}}\middle| -\sqrt{\frac{1}{b}} + c\right)$$

e)

$$f(x) = -3\sin(x) + 5$$
$$f'(x) = -3\cos(x)$$

$$f'(x) = -3$$
$$-3 = -3\cos(x)$$
$$1 = \cos(x)$$
$$x = 2\pi n$$
$$f(2\pi n) = -3\sin(2\pi n) + 5 = 5$$

Die Tangente an den Graphen von f ist parallel zur Geraden g in den Punkten

$$P_n\,(2\pi n \mid 5)$$

mit $n \in \mathbb{N}$.

f)

$$f(x) = 3\cos(x) - a$$
$$f'(x) = -3\sin(x)$$

$$f'(x) = -3$$
$$-3 = -3\sin(x)$$
$$1 = \sin(x)$$
$$x = \frac{\pi n}{2}$$
$$f\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - a = -a$$

Die Tangente an den Graphen von f ist parallel zur Geraden g in den Punkten

$$P_n\left(\frac{\pi n}{2}\middle| -a\right)$$

mit $n \in \mathbb{N}$.