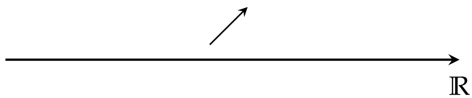
Aufgabe 2

a)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3x + 2 \\
f'(x) &= 3 \\
3 &= 0
\end{aligned}
$$

Keine Lösung. Punktprobe der Steigung:

$$f'(1) = 3 > 0$$



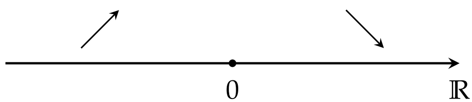
Der Graph von f ist streng monoton steigend im Intervall $(-\infty; +\infty)$.

b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -x^2 + 3 \\
f'(x) &= -2x \\
-2x &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

Punktprobe der Steigung:

$$
\begin{aligned}
f'(-1) &= -2 \cdot (-1) = 2 > 0 \\
f'(1) &= -2 \cdot 1 = -2 < 0
\end{aligned}
$$



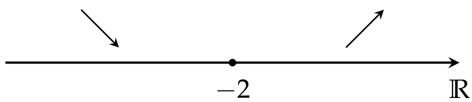
Der Graph von f ist streng monoton steigend im Intervall $(-\infty; 0]$ und streng monoton fallend im Intervall $[0; +\infty)$.

c)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 4x + x^2 \\
f'(x) &= 4 + 2x \\
4 + 2x &= 0 \\
4 &= -2x \\
x &= -2
\end{aligned}
$$

Punktprobe der Steigung:

$$
\begin{aligned}
f'(-3) &= 4 + 2 \cdot (-3) = -2 < 0 \\
f'(-1) &= 4 + 2 \cdot (-1) = 2 > 0
\end{aligned}
$$



Der Graph von f ist streng monoton fallend im Intervall $(-\infty; -2]$ und streng monoton fallend im Intervall $[-2; +\infty)$.

d)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -9 \\
f'(x) &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

Unendlich viele Lösungen.

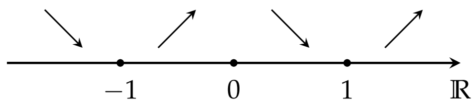
Der Graph von f verläuft parallel zur x-Achse und besitzt somit im Intervall $(-\infty; +\infty)$ an jeder Stelle eine waagerechte Tangente. Dadurch ist er weder monoton steigend, noch fallend.

e)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 2x^2 \\ f'(x) &= 4x^3 - 4x \\ 4x^3 - 4x &= 0 \\ 4x(x^2-1) &= 0 \\ 4x &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x_{2,3} &= \pm 1 \end{aligned}$$

Punktprobe der Steigung:

$$\begin{aligned} f'(-2) &= 4 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) = -24 < 0 \\ f'\left(-\frac{1}{2}\right) &= 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1\frac{1}{2} > 0 \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) &= 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -1\frac{1}{2} < 0 \\ f'(2) &= 4 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 = 24 > 0 \end{aligned}$$



Der Graph von f ist streng monoton fallend in den Intervallen

$$(-\infty; -1] \quad \text{und} \quad [0; 1]$$

und streng monoton steigend in den Intervallen

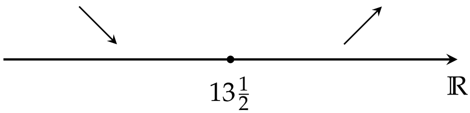
$$[-1; 0] \quad \text{und} \quad [1; +\infty)$$

f)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{3}x^2 - 9x + 1 \\
f'(x) &= \frac{2}{3}x - 9 \\
\frac{2}{3}x - 9 &= 0 \\
\frac{2}{3}x &= 9 \\
x &= 13\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Punktprobe der Steigung:

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \frac{2}{3} \cdot 0 - 9 = -9 < 0 \\
f'(18) &= \frac{2}{3} \cdot 18 - 9 = 3 > 0
\end{aligned}
$$



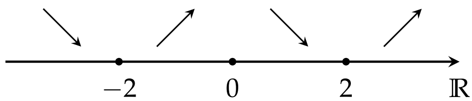
Der Graph von f ist streng monoton fallend im Intervall $\left(-\infty; 13\frac{1}{2}\right]$ und streng monoton steigend im Intervall $\left[13\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

g)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0{,}25x^4 - 2x^2 \\
f'(x) &= x^3 - 4x \\
x^3 - 4x &= 0 \\
x(x^2 - 4) &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
x^2 - 4 &= 0 \\
x^2 &= 4 \\
x_{2,3} &= \pm 2
\end{aligned}
$$

Punktprobe der Steigung:

$$
\begin{aligned}
f'(-3) &= (-3)^3 - 4 \cdot (-3) = -15 < 0 \\
f'(-1) &= (-1)^3 - 4 \cdot (-1) = 3 > 0 \\
f'(1) &= 1^3 - 4 \cdot 1 = -3 < 0 \\
f'(3) &= 3^3 - 4 \cdot 3 = 15 > 0
\end{aligned}
$$



Der Graph von f ist streng monoton fallend in den Intervallen

$$(-\infty; -2] \quad \text{und} \quad [0; 2]$$

und streng monoton steigend in den Intervallen

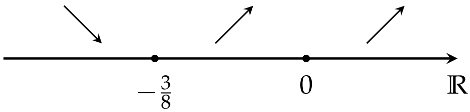
$$[-2; 0] \quad \text{und} \quad [2; +\infty)$$

h)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 + x^3 \\ f'(x) &= 8x^3 + 3x^2 \\ 8x^3 + 3x^2 &= 0 \\ x^2(8x+3) &= 0 \\ x^2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ 8x + 3 &= 0 \\ 8x &= -3 \\ x_2 &= -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

Punktprobe der Steigung:

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 8 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 = -5 < 0 \\ f'\left(-\frac{1}{8}\right) &= 8 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{32} > 0 \\ f'(1) &= 8 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 = 11 > 0 \end{aligned}$$



Der Graph von f ist streng monoton steigend in den Intervallen

$$\left[-\frac{3}{8}; 0\right] \quad \text{und} \quad [0; +\infty)$$

bzw. im Intervall

$$\left[-\frac{3}{8}; +\infty\right)$$

und streng monoton fallend im Intervall

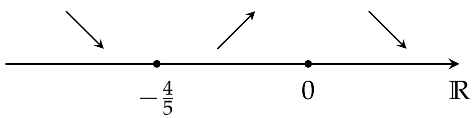
$$\left(-\infty; -\frac{3}{8}\right]$$

i)

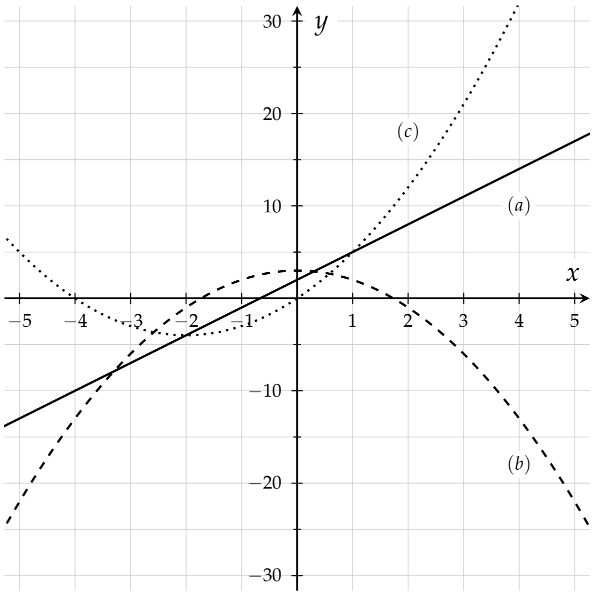
$$\begin{aligned}
f(x) &= -x^5 - x^4 \\
f'(x) &= -5x^4 - 4x^3 \\
-5x^4 - 4x^3 &= 0 \\
x^3(-5x-4) &= 0 \\
x^3 &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
-5x - 4 &= 0 \\
-5x &= 4 \\
x_2 &= -\frac{4}{5}
\end{aligned}$$

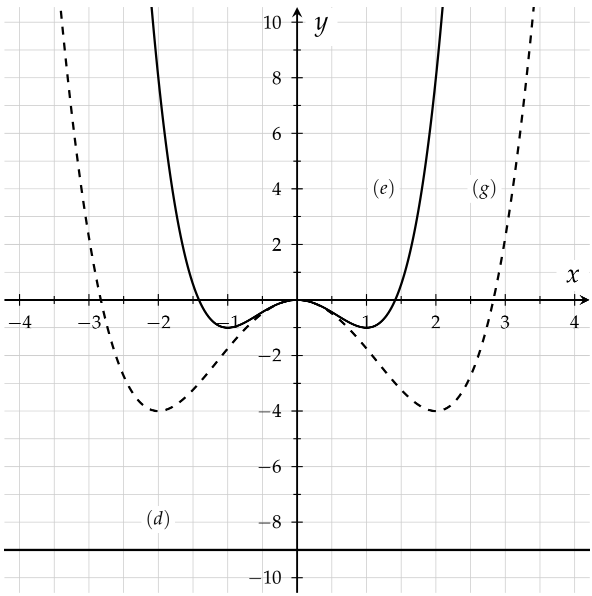
Punktprobe der Steigung:

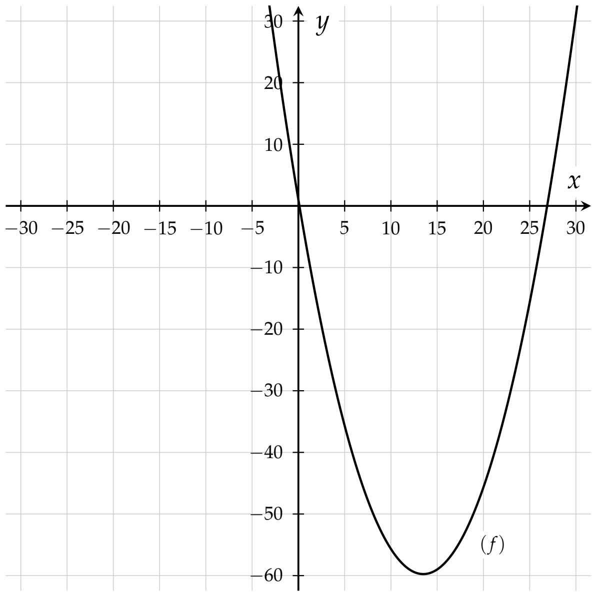
$$\begin{aligned}
f'(-1) &= -5 \cdot (-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 = -1 < 0 \\
f'\left(-\frac{1}{2}\right) &= -5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{16} > 0 \\
f'(1) &= -5 \cdot 1^4 - 4 \cdot 1^3 = -9 < 0
\end{aligned}$$

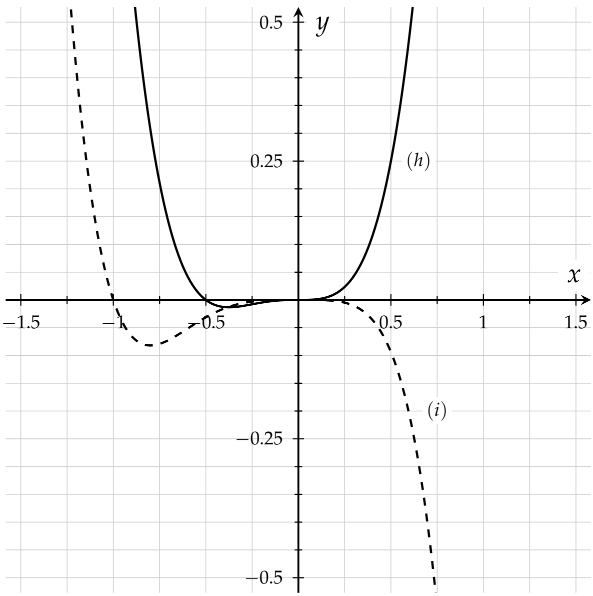


Der Graph von f ist streng monoton fallend in den Intervallen $\left(-\infty; -\frac{4}{5}\right]$ und $[0; +\infty)$ und streng monoton steigend im Intervall $\left[-\frac{4}{5}; 0\right]$


y
x
(a)
(b)
(c)
30
20
10
−10
−20
−30
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5


y
x
(d)
(e)
(g)
10
8
6
4
2
−2
−4
−6
−8
−10
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4


y
x
30
20
10
−10
−20
−30
−40
−50
−60
−30 −25 −20 −15 −10 −5 5 10 15 20 25 30
(f)


y
x
0.5
0.25
−0.25
−0.5
−1.5 −1 −0.5 0.5 1 1.5
(h)
(i)