Aufgabe 2

a)

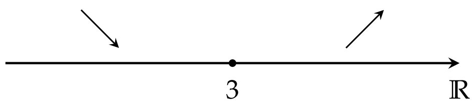
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 11 \\ f'(x) &= 2x - 6 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 2x - 6 &= 0 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(1) &= 2 \cdot 1 - 6 = -4 < 0 \\ f'(4) &= 2 \cdot 4 - 6 = 2 > 0 \end{aligned}$$



$$f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 11 = 2$$

Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 3$ einen lokalen Tiefpunkt mit den Koordinaten $(3 \mid 2)$.

b)

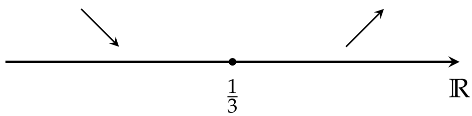
$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$
$$f'(x) = 6x - 2$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 6x - 2 &= 0 \\ 6x &= 2 \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$f'(0) = 6 \cdot 0 - 2 = -2 < 0$$
$$f'(1) = 6 \cdot 1 - 2 = 4 > 0$$



$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{2}{3}$$

Der Graph von f besitzt einen lokalen Tiefpunkt mit den Koordinaten $\left(\frac{1}{3}\middle|\frac{2}{3}\right)$.

c)

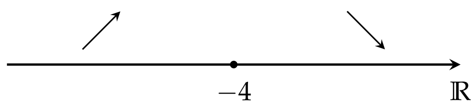
$$f(x) = -2x^2 - 16x + 15$$
$$f'(x) = -4x - 16$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$-4x - 16 = 0$$
$$-4x = 16$$
$$x = -4$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$f'(-5) = -4 \cdot (-5) - 16 = 4 > 0$$
$$f'(0) = -4 \cdot (0) - 16 = -16 < 0$$



$$f(-4) = -2 \cdot (-4)^2 - 16 \cdot (-4) + 15 = 47$$

Der Graph von f besitzt einen lokalen Hochpunkt mit den Koordinaten $(-4 \mid 47)$.

d)

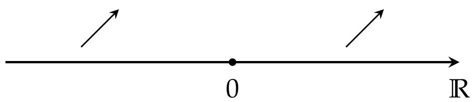
$$f(x) = 3x^3$$
$$f'(x) = 9x^2$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$9x^2 = 0$$
$$x^2 = 0$$
$$x = 0$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$f'(-1) = 9 \cdot (-1)^2 = 9 > 0$$
$$f'(1) = 9 \cdot 1^2 = 9 > 0$$



$$f(0) = 3 \cdot 0^3 = 0$$

Der Graph von f besitzt einen Sattelpunkt mit den Koordinaten $(0 \mid 0)$.

e)

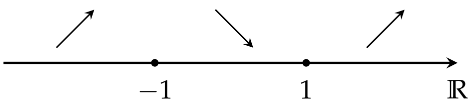
$$f(x) = x^3 - 3x$$
$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3 &= 0 \\ 3x^2 &= 3 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(-2) &= 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 9 > 0 \\ f'(0) &= 3 \cdot 0^2 - 3 = -3 < 0 \\ f'(2) &= 3 \cdot 2^2 - 3 = 9 > 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 2 \\ f(1) &= 1^3 - 3 \cdot 1 = -2 \end{aligned}$$

Der Graph von f besitzt einen lokalen Hochpunkt mit den Koordinaten $(-1 \mid 2)$ und einen lokalen Tiefpunkt mit den Koordinaten $(1 \mid -2)$.

f)

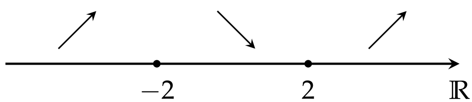
$$f(x) = x^3 - 12x - 5$$
$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 12 = 0$$
$$3x^2 = 12$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$f'(-3) = 3 \cdot (-3)^2 - 12 = 15 > 0$$
$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 = -12 < 0$$
$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 12 = 15 > 0$$



$$f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) - 5 = 11$$
$$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 - 5 = -21$$

Der Graph von f besitzt einen lokalen Hochpunkt mit den Koordinaten $(-2 \mid 11)$ und einen lokalen Tiefpunkt mit den Koordinaten $(2 \mid -21)$.

g)

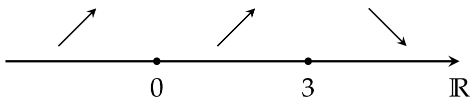
$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4$$
$$f'(x) = -x^3 + 3x^2$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} -x^3 + 3x^2 &= 0 \\ x^2 \cdot (-x+3) &= 0 \\ x^2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ -x + 3 &= 0 \\ 3 &= x_2 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= -(-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 = 4 > 0 \\ f'(1) &= -1^3 + 3 \cdot 1^2 = 2 > 0 \\ f'(4) &= -4^3 + 3 \cdot 4^2 = -64 + 48 = -16 < 0 \end{aligned}$$



$$f(3) = -\frac{1}{4} \cdot 3^4 + 3^3 - 4 = 2{,}75$$
$$f(0) = -\frac{1}{4} \cdot 0^4 + 0^3 - 4 = -4$$

Der Graph von f besitzt einen lokalen Hochpunkt mit den Koordinaten $(3 \mid 2{,}75)$ und einen Sattelpunkt mit den Koordinaten $(0 \mid -4)$.

h)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \\
f'(x) &= x^3 - 2x^2 - 3x
\end{aligned}
$$

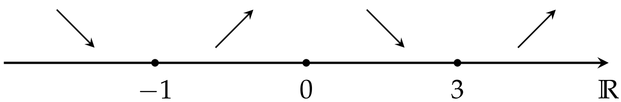
Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
x^3 - 2x^2 - 3x &= 0 \\
x \cdot (x^2 - 2x - 3) &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
x^2 - 2x - 3 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{2,3} &= \frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 3} \\
&= 1 \pm \sqrt{4} \\
x_2 &= 1 + 2 = 3 \\
x_3 &= 1 - 2 = -1
\end{aligned}
$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$
\begin{aligned}
f'(-2) &= (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) = -10 < 0 \\
f'(-0{,}5) &= (-0{,}5)^3 - 2 \cdot (-0{,}5)^2 - 3 \cdot (-0{,}5) = 0{,}875 > 0 \\
f'(1) &= 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = -4 < 0 \\
f'(4) &= 4^3 - 2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 = 20 > 0
\end{aligned}
$$



$$f(-1) = \frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 = -\frac{7}{12}$$
$$f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^4 - \frac{2}{3} \cdot 0^3 - \frac{3}{2} \cdot 0^2 = 0$$
$$f(3) = \frac{1}{4} \cdot 3^4 - \frac{2}{3} \cdot 3^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2 = -11\frac{1}{4}$$

Der Graph von f besitzt zwei lokale Tiefpunkte mit den Koordinaten $\left(-1\middle| -\frac{7}{12}\right)$ und $\left(3\middle| -11\frac{1}{4}\right)$, sowie einen lokalen Hochpunkt mit den Koordinaten $(0 \mid 0)$.

i)

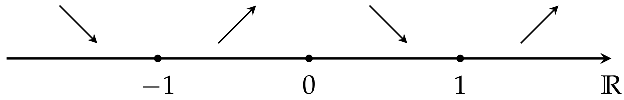
$$f(x) = (x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$$
$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$4x^3 - 4x = 0$$
$$4x \cdot (x^2 - 1) = 0$$
$$4x = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x_{2,3} = \pm 1$$

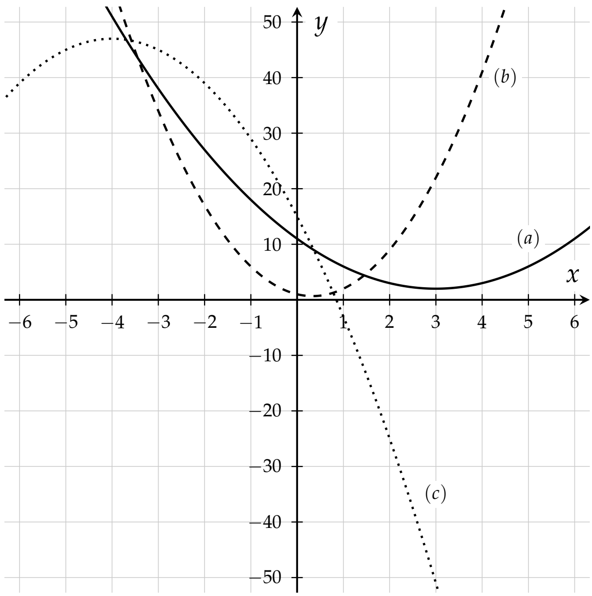
Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

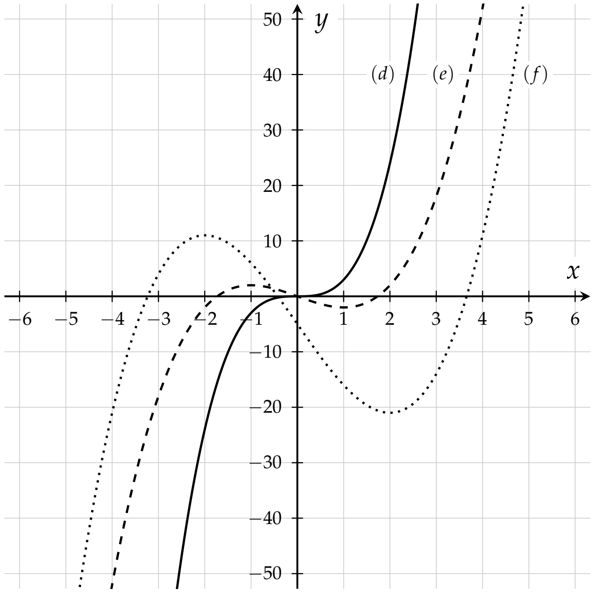
$$f'(-2) = 4 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) = -24 < 0$$
$$f'(-0{,}5) = 4 \cdot (-0{,}5)^3 - 4 \cdot (-0{,}5) = 1{,}5 > 0$$
$$f'(0{,}5) = 4 \cdot 0{,}5^3 - 4 \cdot 0{,}5 = -1{,}5 < 0$$
$$f'(2) = 4 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 = 24 > 0$$

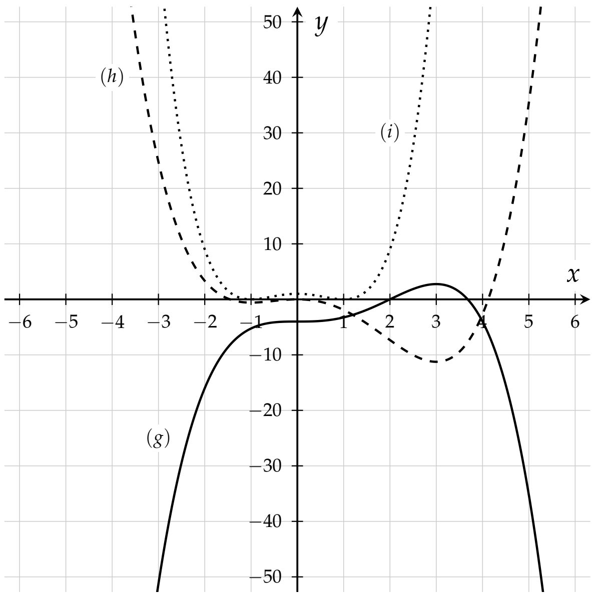


$$f(-1) = \left((-1)^2 - 1\right)^2 = 0$$
$$f(0) = (0^2 - 1)^2 = 1$$
$$f(1) = (1^2 - 1)^2 = 0$$

Der Graph von f besitzt zwei lokale Tiefpunkte mit den Koordinaten $(-1 \mid 0)$ und $(1 \mid 0)$, sowie einen lokalen Hochpunkt mit den Koordinaten $(0 \mid 1)$.




y
x
(d)
(e)
(f)
50
40
30
20
10
−10
−20
−30
−40
−50
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6


y
x
(h)
(i)
(g)
50
40
30
20
10
−10
−20
−30
−40
−50
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6