Aufgabe 3

a)

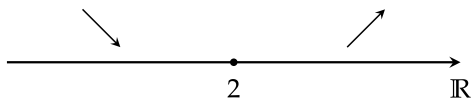
$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0{,}5x^2 - 2x \\
f'(x) &= x - 2
\end{aligned}
$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
x - 2 &= 0 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$
\left.\begin{aligned}
f'(1) &= 1 - 2 = -1 < 0 \\
f'(3) &= 3 - 2 = 1 > 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{lokaler Tiefpunkt} \\ \text{bei } x = -2\end{array}
$$



$$
f(2) = 0{,}5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = -2
$$

Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 2$ einen lokalen Tiefpunkt mit den Koordinaten $T\,(2 \mid -2)$.

$$
\text{Für } x \to \pm\infty \quad f(x) \to 0{,}5x^2
$$

das heißt, dass

$$
\begin{aligned}
&\text{für } x \to +\infty \quad f(x) \to +\infty \\
&\text{für } x \to -\infty \quad f(x) \to +\infty
\end{aligned}
$$

Damit ist der Punkt T ein globaler Tiefpunkt und es existiert kein globaler Hochpunkt.

b)

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$$
$$f'(x) = x^2 - 4$$

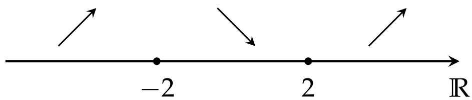
Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x_{1,2} &= \pm 2 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$\left.\begin{aligned} f'(-3) &= (-3)^2 - 4 = 5 > 0 \\ f'(0) &= 0^2 - 4 = -4 < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{lokaler Hochpunkt} \\ \text{bei } x = -2\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(0) &= -4 < 0 \\ f'(3) &= (3)^2 - 4 = 5 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{lokaler Tiefpunkt} \\ \text{bei } x = 2\end{array}$$



$$f(-2) = \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) = 5\frac{1}{3}$$
$$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 = -5\frac{1}{3}$$

Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = -2$ einen lokalen Hochpunkt mit den Koordinaten $H\left(-2 \middle| 5\frac{1}{3}\right)$ und an der Stelle $x = 2$ einen lokalen Tiefpunkt mit den Koordinaten $T\left(2 \middle| -5\frac{1}{3}\right)$.

$$\text{Für } x \to \pm\infty \quad f(x) \to \frac{1}{3}x^3$$

das heißt, dass

$$\begin{aligned} \text{für } x \to +\infty \quad f(x) \to +\infty \\ \text{für } x \to -\infty \quad f(x) \to -\infty \end{aligned}$$

Damit existiert weder ein globaler Hochpunkt noch ein globaler Tiefpunkt.

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 + x^3 \\ f'(x) &= 5x^4 + 3x^2 \end{aligned}$$

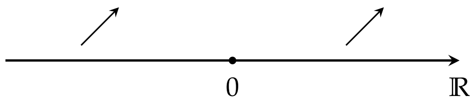
Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 5x^4 + 3x^2 &= 0 \\ x^2 \cdot (5x^2 + 3) &= 0 \\ x^2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ 5x^2 + 3 &= 0 \\ 5x^2 &= -3 \\ x^2 &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Keine Lösung außer $x = 0$.

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$\left.\begin{aligned} f'(-1) &= 5 \cdot (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^2 = 8 > 0 \\ f'(1) &= 5 \cdot 1^4 + 3 \cdot 1^2 = 8 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{Sattelpunkt} \\ \text{bei } x = 0\end{array}$$



$$f(0) = 0^5 + 0^3 = 0$$

Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 0$ einen Sattelpunkt mit den Koordinaten $S\,(0 \mid 0)$.

$$\text{Für } x \to \pm\infty \quad f(x) \to x^5$$

das heißt, dass

$$\begin{aligned} &\text{für } x \to +\infty \quad f(x) \to +\infty \\ &\text{für } x \to -\infty \quad f(x) \to -\infty \end{aligned}$$

Damit existiert weder ein globaler Hochpunkt noch ein globaler Tiefpunkt.

d)

$$\begin{aligned} f(x) &= -0{,}5x^4 + 2x^3 - 2x^2 \\ f'(x) &= -2x^3 + 6x^2 - 4x \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} -2x^3 + 6x^2 - 4x &= 0 \\ -2x \cdot (x^2 - 3x + 2) &= 0 \\ -2x &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x^2 - 3x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

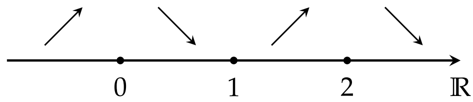
$$
\begin{aligned}
x_{2,3} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} \\
&= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\
&= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \\
x_2 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \\
x_3 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}
$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$
\left.
\begin{aligned}
f'(-1) &= -2 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \\
&= 12 > 0 \\
f'\left(\frac{1}{2}\right) &= -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{3}{4} < 0
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{lokaler}\\ \text{Hochpunkt}\\ \text{bei } x = 0\end{array}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
f'\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{3}{4} < 0 \\
f'\left(\frac{3}{2}\right) &= -2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{3}{4} > 0
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{lokaler}\\ \text{Tiefpunkt}\\ \text{bei } x = 1\end{array}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
f'\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{3}{4} > 0 \\
f'(3) &= -2 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 \\
&= -12 < 0
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{lokaler}\\ \text{Hochpunkt}\\ \text{bei } x = 2\end{array}
$$



$$f(0) = -0{,}5 \cdot (0)^4 + 2 \cdot (0)^3 - 2 \cdot (0)^2 = 0$$
$$f(1) = -0{,}5 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 = -0{,}5$$
$$f(2) = -0{,}5 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 = 0$$

Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 0$ einen lokalen Hochpunkt mit den Koordinaten $T_1\,(0 \mid 0)$, an der Stelle $x = 1$ einen lokalen Tiefpunkt mit den Koordinaten $H\,(1 \mid 0)$ und an der Stelle $x = 2$ einen lokalen Hochpunkt mit den Koordinaten $T_2\,(2 \mid 0)$.

$$\text{Für } x \to \pm\infty \quad f(x) \to -0{,}5x^4$$

das heißt, dass

$$\text{für } x \to +\infty \quad f(x) \to -\infty$$
$$\text{für } x \to -\infty \quad f(x) \to -\infty$$

Die Punkte T_1 und T_2 befinden sich auf gleicher Höhe und sind somit beide globale Hochpunkte, es existiert jedoch kein globaler Tiefpunkt.

e)

$$f(x) = 0{,}02x^5 - 0{,}1x^4$$
$$f'(x) = 0{,}1x^4 - 0{,}4x^3$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

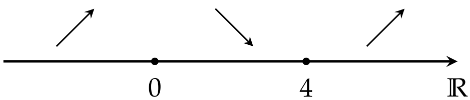
$$0{,}1x^4 - 0{,}4x^3 = 0$$
$$0{,}1x^3 \cdot (x - 4) = 0$$

$$\begin{aligned} 0{,}1x^3 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x - 4 &= 0 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$\left.\begin{aligned} f'(-1) &= 0{,}1 \cdot (-1)^4 - 0{,}4 \cdot (-1)^3 = 0{,}5 > 0 \\ f'(1) &= 0{,}1 \cdot 1^4 - 0{,}4 \cdot 1^3 = -0{,}3 < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{lokaler Hochpunkt} \\ \text{bei } x = 0\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(1) &= -0{,}3 < 0 \\ f'(5) &= 0{,}1 \cdot 5^4 - 0{,}4 \cdot 5^3 = 12{,}5 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{lokaler Tiefpunkt} \\ \text{bei } x = 4\end{array}$$



$$\begin{aligned} f(0) &= 0{,}02 \cdot 0^5 - 0{,}1 \cdot 0^4 = 0 \\ f(4) &= 0{,}02 \cdot 4^5 - 0{,}1 \cdot 4^4 = -5{,}12 \end{aligned}$$

Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 0$ einen lokalen Hochpunkt mit Koordinaten $H\,(0 \mid 0)$ und an der Stelle $x = 4$ einen lokalen Tiefpunkt mit Koordinaten $T\,(4 \mid -5{,}12)$.

$$\text{Für } x \to \pm\infty \quad f(x) \to 0{,}02x^5$$

das heißt, dass

$$\begin{aligned} &\text{für } x \to +\infty \quad f(x) \to +\infty \\ &\text{für } x \to -\infty \quad f(x) \to -\infty \end{aligned}$$

Damit existiert weder ein globaler Hochpunkt noch ein globaler Tiefpunkt.

f)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^6 - \frac{6}{5}x^5 - 2x^4 + 6 \\
f'(x) &= 6x^5 - 6x^4 - 8x^3
\end{aligned}
$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
6x^5 - 6x^4 - 8x^3 &= 0 \\
2x^3 \cdot (3x^2 - 3x - 4) &= 0 \\
2x^3 &= 0 \\
x_1 &= 0 \\
3x^2 - 3x - 4 &= 0 \\
x^2 - x - \frac{4}{3} &= 0
\end{aligned}
$$

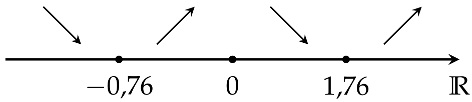
$$
\begin{aligned}
x_{2,3} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{3}} \\
&= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{19}{12}} \\
x_2 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{19}{12}} \approx 1{,}76 \\
x_3 &= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{19}{12}} \approx -0{,}76
\end{aligned}
$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$
\left.
\begin{aligned}
f'(-1) &= 6 \cdot (-1)^5 - 6 \cdot (-1)^4 - 8 \cdot (-1)^3 \\
&= -4 < 0 \\
f'\left(-\frac{1}{2}\right) &= 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \\
&= \frac{7}{16} > 0
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{lokaler} \\ \text{Tiefpunkt} \\ \text{bei } x = -0{,}76\end{array}
$$

$$\left.\begin{aligned} f'\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{7}{16} > 0 \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) &= 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= -\frac{19}{16} < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{lokaler}\\ \text{Hochpunkt}\\ \text{bei } x = 0\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{19}{16} < 0 \\ f'(2) &= 6\cdot 2^5 - 6\cdot 2^4 - 8\cdot 2^3 = 32 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{lokaler}\\ \text{Tiefpunkt}\\ \text{bei } x = 1{,}76\end{array}$$



$$\begin{aligned} f(-0{,}76) &= (-0{,}76)^6 - \frac{6}{5}\cdot(-0{,}76)^5 - 2\cdot(-0{,}76)^4 + 6 \approx 5{,}83 \\ f(0) &= 0^6 - \frac{6}{5}\cdot 0^5 - 2\cdot 0^4 + 6 = 6 \\ f(1{,}76) &= (1{,}76)^6 - \frac{6}{5}\cdot(1{,}76)^5 - 2\cdot(1{,}76)^4 + 6 \approx -3{,}73 \end{aligned}$$

Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = -0{,}76$ einen lokalen Tiefpunkt mit den Koordinaten $T_1\,(-0{,}76 \mid 5{,}83)$, an der Stelle $x = 0$ einen lokalen Hochpunkt mit den Koordinaten $H\,(0 \mid 6)$ und an der Stelle $x = 1{,}76$ einen lokalen Tiefpunkt mit den Koordinaten $T_2\,(1{,}76 \mid -3{,}73)$.

$$\text{Für } x \to \pm\infty \quad f(x) \to x^6$$

das heißt, dass

$$\begin{aligned} &\text{für } x \to +\infty \quad f(x) \to +\infty \\ &\text{für } x \to -\infty \quad f(x) \to +\infty \end{aligned}$$

Damit ist der Punkt T_2 ein globaler Tiefpunkt, es existiert jedoch kein globaler Hochpunkt.

g)

$$\begin{aligned} f(x) &= 6 - 2x^3 + 4x^5 - x^4 = 4x^5 - x^4 - 2x^3 + 6 \\ f'(x) &= 20x^4 - 4x^3 - 6x^2 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 20x^4 - 4x^3 - 6x^2 &= 0 \\ 2x^2 \cdot (10x^2 - 2x - 3) &= 0 \\ 2x^2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ 10x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{3}{10} &= 0 \\ x_{2,3} &= \frac{1}{10} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{3}{10}} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{31}}{10} \end{aligned}$$

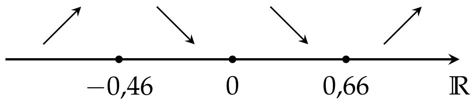
$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1 - \sqrt{31}}{10} \approx -0{,}46 \\ x_3 &= \frac{1 + \sqrt{31}}{10} \approx 0{,}66 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$\left.\begin{aligned} f'(-1) &= 20 \cdot (-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 \\ &= 18 > 0 \\ f'\left(-\frac{1}{5}\right) &= 20 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^4 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^3 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \\ &= -\frac{22}{125} < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{lokaler} \\ \text{Hochpunkt} \\ \text{bei } x = -0{,}46\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} f'\left(-\frac{1}{5}\right) &= -\frac{22}{125} < 0 \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) &= 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{3}{4} < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{Sattelpunkt} \\ \text{bei } x = 0\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{3}{4} < 0 \\ f'(1) &= 20 \cdot 1^4 - 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 = 10 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{lokaler} \\ \text{Tiefpunkt} \\ \text{bei } x = 0{,}66\end{array}$$



$$\begin{aligned} f(-0{,}46) &= 4 \cdot (-0{,}46)^5 - (-0{,}46)^4 - 2 \cdot (-0{,}46)^3 + 6 \approx 6{,}07 \\ f(0) &= 4 \cdot 0^5 - 0^4 - 2 \cdot 0^3 + 6 = 6 \\ f(0{,}66) &= 4 \cdot (0{,}66)^5 - (0{,}66)^4 - 2 \cdot (0{,}66)^3 + 6 \approx 5{,}74 \end{aligned}$$

Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = -0{,}46$ einen lokalen Hochpunkt mit den Koordinaten $H\,(-0{,}46 \mid 6{,}07)$, an der Stelle $x = 0$ einen Sattelpunkt mit den Koordinaten $S\,(0 \mid 6)$ und an der Stelle $x = 0{,}66$ einen lokalen Tiefpunkt mit den Koordinaten $T\,(0{,}66 \mid 5{,}74)$.

$$\text{Für } x \to \pm\infty \quad f(x) \to 4x^5$$

das heißt, dass

$$\begin{aligned} &\text{für } x \to +\infty \quad f(x) \to +\infty \\ &\text{für } x \to -\infty \quad f(x) \to -\infty \end{aligned}$$

Damit existiert weder ein globaler Hochpunkt noch ein globaler Tiefpunkt.

h)

$$\begin{aligned} f(x) &= -8 - x \cdot (3-x)^2 + 2x \\ &= -8 - x \cdot (9 - 6x + x^2) + 2x \\ &= -8 - 9x + 6x^2 - x^3 + 2x \\ &= -x^3 + 6x^2 - 7x - 8 \\ f'(x) &= -3x^2 + 12x - 7 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

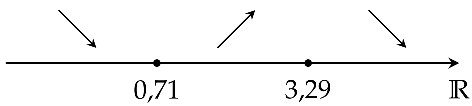
$$\begin{aligned} -3x^2 + 12x - 7 &= 0 \\ x^2 - 4x + \frac{7}{3} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \frac{7}{3}} \\ &= 2 \pm \sqrt{\frac{5}{3}} \\ x_1 &= 2 + \sqrt{\frac{5}{3}} \approx 3{,}29 \\ x_2 &= 2 - \sqrt{\frac{5}{3}} \approx 0{,}71 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$\left.\begin{aligned} f'(0) &= -3 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 - 7 = -7 < 0 \\ f'(1) &= -3 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 7 = 2 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{lokaler Tiefpunkt} \\ \text{bei } x = 0{,}71\end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(1) &= 2 > 0 \\ f'(4) &= -3 \cdot 4^2 + 12 \cdot 4 - 7 = -7 < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{lokaler Hochpunkt} \\ \text{bei } x = 3{,}29\end{array}$$



$$f(0{,}71) = -(0{,}71)^3 + 6 \cdot (0{,}71)^2 - 7 \cdot (0{,}71) - 8 \approx -10{,}3$$
$$f(3{,}29) = -(3{,}29)^3 + 6 \cdot (3{,}29)^2 - 7 \cdot (3{,}29) - 8 \approx -1{,}7$$

Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 0$ einen lokalen Tiefpunkt mit den Koordinaten $T\,(0{,}71 \mid -10{,}3)$ und an der Stelle $x = 3{,}29$ einen lokalen Hochpunkt mit den Koordinaten $H\,(3{,}29 \mid -1{,}7)$.

$$\text{Für } x \to \pm\infty \quad f(x) \to -x^3$$

das heißt, dass

$$\text{für } x \to +\infty \quad f(x) \to -\infty$$
$$\text{für } x \to -\infty \quad f(x) \to +\infty$$

Damit existiert weder ein globaler Hochpunkt noch ein globaler Tiefpunkt.

i)

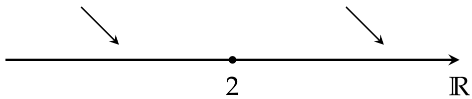
$$\begin{aligned} f(x) &= (2-x)^3 + 1 \\ &= (2-x)^2(2-x) + 1 \\ &= (4 - 4x + x^2)(2-x) + 1 \\ &= 8 - 4x - 8x + 4x^2 + 2x^2 - x^3 \\ &= -x^3 + 6x^2 - 12x + 8 \\ f'(x) &= -3x^2 + 12x - 12 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} -3x^2 + 12x - 12 &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ x_{2,3} &= \frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel bei $f'(x)$

$$\left.\begin{aligned} f'(1) &= -3 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 12 = -3 < 0 \\ f'(3) &= -3 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 12 = -3 < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{Sattelpunkt} \\ \text{bei } x = 2\end{array}$$



$$f(2) = -(2)^3 + 6 \cdot (2)^2 - 12 \cdot (2) + 8 = 0$$

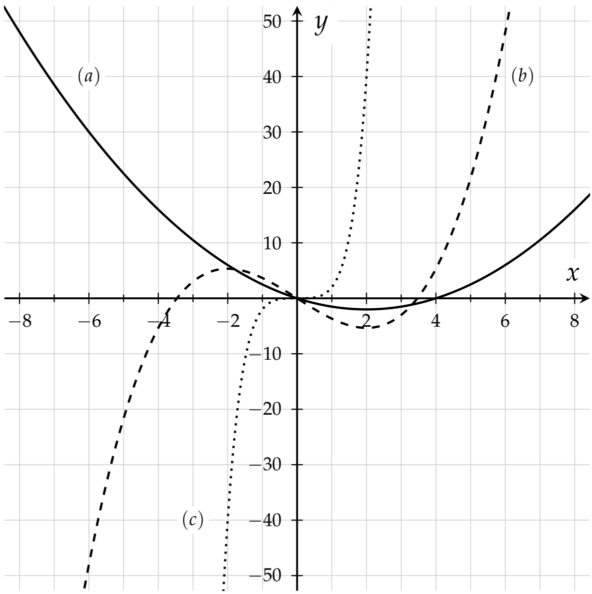
Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = 2$ einen Sattelpunkt mit den Koordinaten $S\,(2 \mid 0)$.

$$\text{Für } x \to \pm\infty \quad f(x) \to -x^3$$

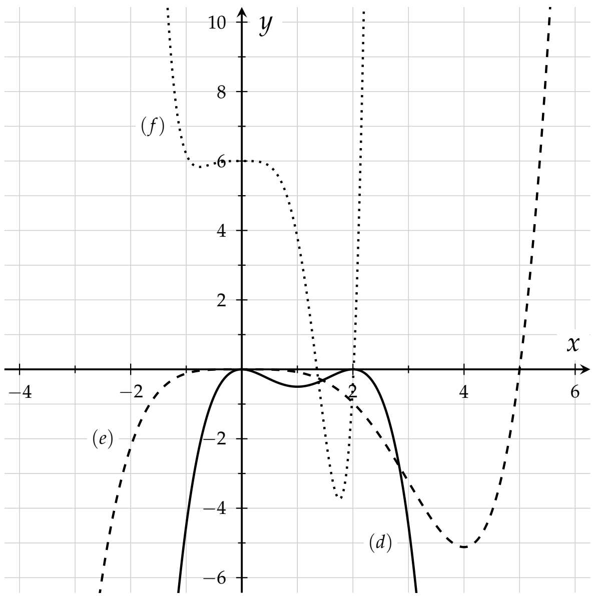
das heißt, dass

$$\begin{aligned} &\text{für } x \to +\infty \quad f(x) \to -\infty \\ &\text{für } x \to -\infty \quad f(x) \to +\infty \end{aligned}$$

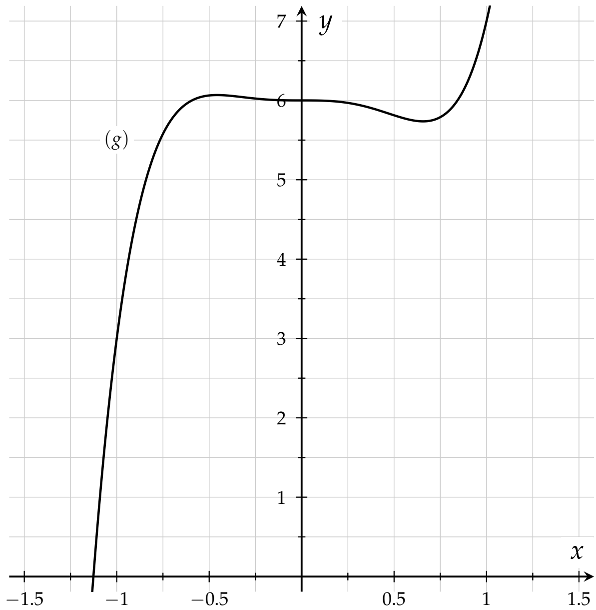
Damit existiert weder ein globaler Hochpunkt noch ein globaler Tiefpunkt.

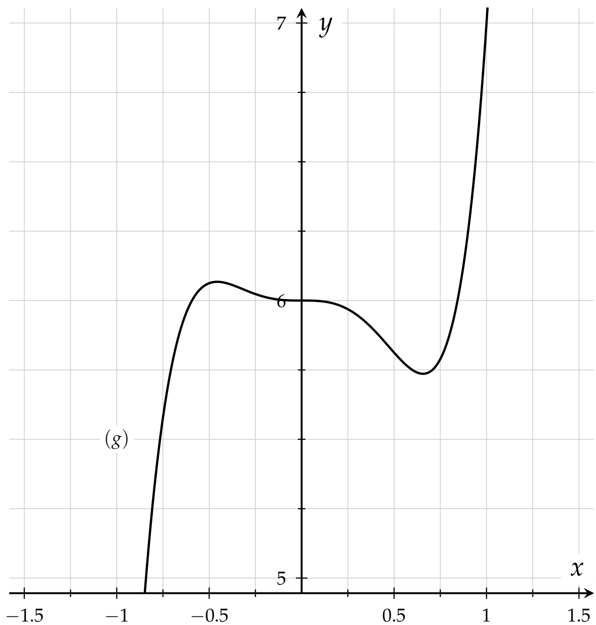


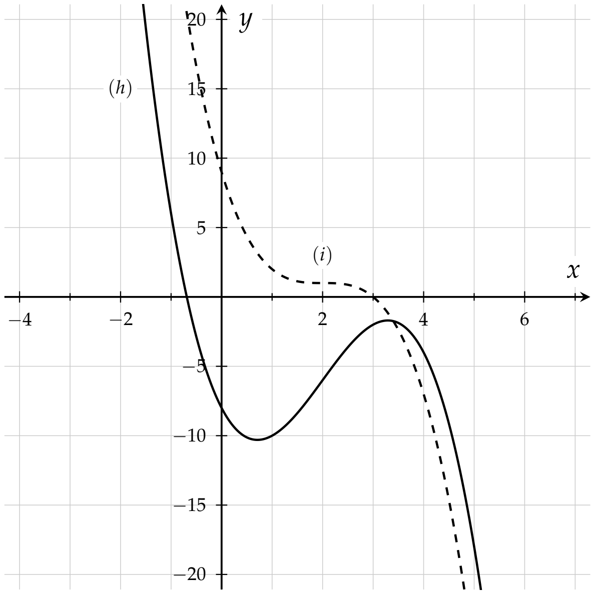
50
40
30
20
10
−10
−20
−30
−40
−50
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8
y
x
(a)
(b)
(c)



10
8
6
4
2
−2
−4
−6
−4
−2
2
4
6
y
x
(f)
(e)
(d)


7
6
5
4
3
2
1
y
x
(g)
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5


7
6
5
y
x
(g)
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5



y
x
(h)
(i)
20
15
10
5
−5
−10
−15
−20
−4
−2
2
4
6